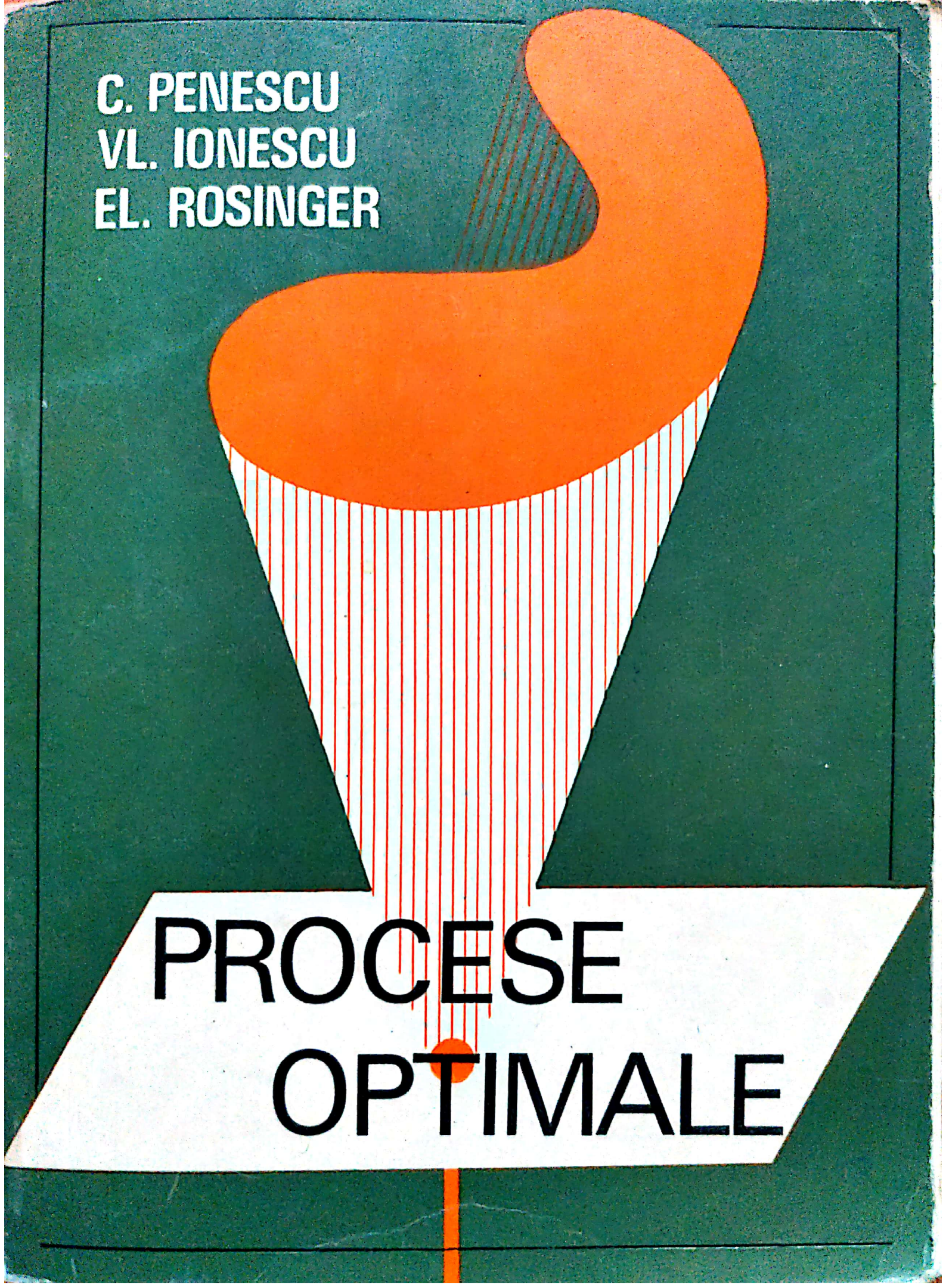
C. PENESCU
VL. IONESCU
EL. ROSINGER



PROCESE OPTIMALE

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Teoria sistemelor optimale este unul dintre rezultatele de seamă ale cercetărilor stimulate de dezvoltarea rapidă a automatizărilor complexe, al căror ritm de pătrundere în sectoarele economiei mondiale este din ce în ce mai accentuat.

Lucrarea de față, prima de acest gen scrisă de autorii români, expune un material care pune în temă cititorul cu aspectul riguros al principalelor probleme care decurg din noțiunea de optimalitate, noțiune care în prezent are largi implicații în toate domeniile vieții economice.

Avînd în vedere atenția deosebită care se acordă în prezent în țara noastră introducerii automatizărilor și calculatoarelor, precum și orientarea cercetării științifice în acest domeniu, autorii consideră că lucrarea de față, prin problematica abordată, constituie un început bun pentru familiarizarea și înțelegerea de către cercetătorul dornic să lucreze în domeniul teoriei sistemelor optimale a aspectelor esențiale legate de optimalitate.

Materialul prezentat ilustrează și o serie de rezultate personale ale autorilor în domeniul fundamentului matematic al teoriei sistemelor optimale.

Lucrarea se adresează cercetătorilor din domeniul automaticii teoretice, precum și matematicienilor, doctoranzilor și studenților din facultatea de automatică.

Autorii consideră de datoria lor să mulțumească Editurii Academiei pentru publicarea materialului de față și în mod deosebit redactorului ing. Lia Crețoiu pentru prețioasa contribuție pe care a avut-o în apariția lucrării.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Pag.

Introducere 11

Capitolul 1. SISTEM ȘI OPTIMALITATE 13
1.1. Noțiunea de sistem 13
1.2. Noțiunea de stare 18
1.3. Controlabilitate 21
1.4. Adaptabilitate 22
1.5. Optimalitate 26

Capitolul 2. FUNDAMENTUL MATEMATIC AL TEORIEI SISTEMELOR OPTIMALE 32
2.1. Introducere 32
2.2. Principiul general al separabilității 33
2.2.1. Con de variație. Mulțime derivată. Con derivat . . 33
2.2.2. Punct extrem al unei mulțimi în raport cu o axă de coordonate 35
2.2.3. Separabilitatea în punctele extreme 35
2.2.4. Imaginea geometrică a noțiunilor introduse la 2.2.2 și a proprietății de separabilitate de la 2.2.3 43
2.2.5. Extensiuni ale teoremei de separabilitate 49
2.3. Principiul maximului pentru extreme fixe 56
2.3.1. Formularea problemei 56
2.3.2. Reprezentarea geometrică a optimalității 57
2.3.3. Transportul de-a lungul unei traiectorii 59
2.3.4. „Transportul" problemei de optimalitate în punctul final 62
2.3.5. Formalismul lui Hamilton și principiul maximului lui Pontreaghin 70
2.3.6. Introducerea condițiilor izoperimetrice 75
2.3.7. Problema de tip Lagrange 79
2.3.8. Problema timpului final neimpus 104
2.4. Principiul maximului pentru extreme mobile 108
2.4.1. Formularea problemei 108

Scanned with OKEN Scanner

Pag

2.4.2. Modificarea problemei 111
2.4.3. Condițiile de transversalitate 113
2.5. Principiul maximului pentru condiții restrictive de tip inegalitate 117
2.5.1. Condiții izoperimetrice de tip inegalitate 117
2.6. Optimalitatea în cazul sistemelor discrete 120
2.6.1. Enunțarea problemei 120
2.6.2. Reprezentarea geometrică a optimalității 122
2.6.3. Transportul de-a lungul unei traiectorii 123
2.6.4. „Transportul" problemei de optimalitate în punctul final 127
2.6.5. Formalismul lui Hamilton și principiul maximului . . . 136

Capitolul 3. ECUAȚIA LUI BELLMAN ȘI FORMALISMUL HAMILTON-JACOBI. PRINCIPIUL GENERAL AL PROGRAMĂRII DINAMICE 138

3.1. Enunțarea problemei 138
3.2. Teorema de necesitate. Ecuația lui Bellman 142
3.3. Teorema de suficiență 146
3.4. Sistemul canonic 150
3.5. Principiul maximului 154
3.6. Principiul general al programării dinamice 159
3.6.1. Eficiența procesului de conducere 159
3.6.2. Optimizarea unui proces de conducere 164
3.6.3. Noțiunea de strategie continuă 166
3.6.4. Noțiunea de strategie discretă 173
3.6.5. Considerarea influenței mărimilor perturbatoare . . . 175
3.6.6. Principiul general al optimalității 179
3.6.7. Concluzii 182

Capitolul 4. SISTEME LINIARE AUTONOME OPTIMIZATE ÎN FUNCȚIE DE RAPIDITATE 186

4.1. Introducere. Formularea problemei 186
4.2. Condiții de suficiență 191
4.3. Unicitatea comenzii optimale 194
4.4. Existența comenzilor optimale 198
4.5. Teorema lui Neustadt și algoritmul Eaton 209

Capitolul 5. CONDIȚII SUFICIENTE DE OPTIMALITATE ÎN SENSUL LUI BOLTEANSKI 228

5.1. Formularea problemei 228
5.2. Sinteza regulată 233
5.3. Condițiile de suficiență rezultate din ecuația lui Bellman . . . 243

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

Capitolul 6. CRITERIUL GENERAL INTEGRAL PĂTRATIC 250
6.1. Programarea pătratică funcțională 250
6.2. Soluția generală a ecuației Wiener-Hopf 254
6.3. Metoda celei mai rapide pante 258
6.4. Caz particular 262
6.5. Descompunerea spectrală în spațiul adjunct H^* 264
6.6. Controlabilitate 268
6.7. Criteriul general integral pătratic 271
6.7.1. Enunțarea problemei 271
6.7.2. Exprimarea indicelui de performanță 274
6.7.3. Rezolvarea problemei 276
6.7.4. Optimizarea valorii finale 277
6.7.5. Aplicații privind identificarea obiectelor liniare autonome 279

Capitolul 7. PROBLEMA SINTEZEI OPTIMALE LOCALE 283
7.1. Hamiltonianul trunchiat 283
7.2. Ecuația Hamilton-Jacobi trunchiată 286
7.3. Sistemul canonic trunchiat 289
7.4. Considerații din punctul de vedere al calculului 290
7.5. Problema stabilității soluției 293
7.6. Exemplu : consumul minim de energie 297

Capitolul 8. REZULTATE PRIVIND EXISTENȚA COMENZILOR OPTIMALE 300
8.1. Preliminarii 300
8.2. Sisteme liniare 301
8.3. Sisteme neliniare 309
8.3.1. Cazul conducerii optime cu timp minim 309
8.3.2. Cazul conducerii optime generale. 313
8.4. Controlabilitatea 322

BIBLIOGRAFIE 327

OPTIMAL PROCESSES (abstract) 331

CONTENTS 333

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Lucrarea încearcă o prezentare a principalelor probleme care constituie subiectul central al teoriei sistemelor optimale.

În ultimii opt ani au apărut o serie de lucrări remarcabile în acest domeniu, care au condus la o riguroasă fundamentare teoretică a problemelor legate de noţiunea de optimalitate. Este cazul să amintim tratatele scrise de L.S. Pontreaghin, V. G. Bolteanski, M. Hestenes, E. B. Lee şi L. Markus, care reprezintă momente esenţiale în dezvoltarea teoretică a sistemelor optimale.

Aşa cum este cunoscut, principiul maximului al lui L. S. Pontreaghin şi principiul programării dinamice al lui R. Bellman au furnizat cele două metode de bază pentru investigarea teoretică şi sub aspect calculatoriu a sistemelor optimale.

Materialul dezvoltat în lucrare este împărţit în opt capitole şi abordează aspectele esenţiale ale teoriei optimalităţii, introducîndu-se concepţii originale ale autorilor atît sub aspectul tehnicii de demonstrare matematică, cît şi al organizării şi prezentării materialului.

Se menţionează în acest sens aspectul original de demonstrare din întreg capitolul 2, cu evidenţierea principiului de separabilitate şi a principiului maximului discret.

Capitolul 1 al lucrării încearcă o prezentare a noţiunii sistem şi de optimalitate şi un mod general de formalizare matematică.

Capitolul 2 se ocupă de prezentarea aspectului matematic al teoriei generale a sistemelor optimale, insistîndu-se asupra principiului maximului al lui L. S. Pontreaghin şi asupra diferitelor aspecte ale acestuia. S-a acordat o atenţie deosebită formulării corecte a problemei lui Lagrange, precum şi a demonstrării riguroase a principiului maximului în varianta discretă.

În capitolul 3 se dezvoltă complet, cu toate implicaţiile corespunzătoare, ecuaţia lui R. Bellman şi formalismului Hamilton-Jacobi, alcătuindu-se de fapt materialul de bază al aspectului continuu al programării dinamice. Se abordează principiul general

Scanned with OKEN Scanner

al programării dinamice, principiul lui R. Bellman regăsindu-se ca un caz particular.

Capitolul 4 abordează sistemele liniare staţionare optimizate în funcţie de rapiditate în spiritul cum au fost tratate de V.G. Bolteanski, tratarea acestui cunoscut autor excelînd în rigurozitate. Se reface algoritmul Eaton.

În capitolul 5 se ilustrează, cu ajutorul condiţiilor de sinteză regulată a lui Bolteaniski, problema de suficienţă în optimalitate, înţelegîndu-se prin aceasta în ce condiţii o sinteză supusă principiului maximului este şi optimală.

Capitolul 6 prezintă aspectul general al criteriului integral pătratic cu ajutorul unui model care apelează la teoria operatorilor complet continui în spaţii Hilbert. Procedura de abordare se bazează pe programarea pătratică funcţională, indusă în lucrările lui A. V. Balakrishnan. Ca un corolar al metodei generale se evidenţiază condiţiile de contralabilitate ale lui R. Kalman.

Capitolul 7 se ocupă de o metodologie aproximativă de calcul în ceea ce priveşte sinteza optimală a sistemelor neliniare, introdusă de Kipiniak.

În final, capitolul 8 schiţează, deoarece problematica este extrem de vastă, condiţiile şi aspectele legate de problema existenţei comenzilor optimale.

Materialul prezentat nu are nici pe departe pretenţia de a fi exhaustiv, ci se rezumă la principalele idei care alcătuiesc în prezent obiectul teoriei sistemelor optimale. Astfel nu s-a abordat, de exemplu, nici un subiect privind consecinţele optimalităţii care decurg din teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. În acest domeniu menţionăm lucrările originale ale colectivului condus de A. Halanay.

Menţionăm în încheiere că o aplicaţie eficientă a ideilor şi a metodelor prezentate presupune o studiere suplimentară consacrată procedeelor calculatorii specifice tehnicii de optimizare, material de sine stătător şi care poate alcătui obiectul unei lucrări independente.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1 SISTEM ȘI OPTIMALITATE

Considerațiile care urmează sînt destinate introducerii în mod riguros a noțiunilor de sistem și de optimalitate, concepte care în prezent sînt de o largă circulație, afectînd multiple domenii ale științei și care au introdus o anumită conduită de cercetare în aceste domenii.

Fundamentarea noțiunilor amintite este susceptibilă de un grad foarte mare de generalitate, dar întreaga dezvoltare matematică care s-a acordat, cît și principalul obiect de aplicabilitate îl constituie totuși sistemele automate. Dezvoltarea teoretică și practică a acestora a condus la introducerea noțiunii de sistem în general, împreună cu o serie de atribute ale acestuia cum este optimalitatea. Mai mult, formalismul structural și matematic al sistemelor automate, în speță al celor optimale, a fost împrumutat și de alte sectoare de cercetare științifică facilitînd o clasificare și o ordonare a ideilor extrem de propice cercetărilor în aceste domenii.

1.1. NOȚIUNEA DE SISTEM

Un obiect fizic oarecare este descris de o anumită clasă de legi fizice împreună cu o serie de atribute caracteristice mediului în care acesta există sau destinației pentru care a fost creat. Din punct de vedere al caracterizării matematice al acestuia, obiectul se va descrie printr-o serie de variabile, legate între ele printr-un grup de relații. Formalizarea matematică al unui obiect fizic, adică asocierea de variabile caracteristice cît și a relațiilor dintre ele, reflectă legitatea fizică care-l descrie cît și o serie de proprietăți care privesc destinația de folosire al obiectului. În general, această descriere matematică trebuie să reflecte un caracter de univocitate sub aspectul cauzalității, iar relațiile matematice să fie minimale din punct de vedere al numărului, independente și coerente.

Scanned with OKEN Scanner

În consecinţă se va introduce un set de variabile caracteristice:

$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$

dependente de timp, legate printr-o serie de relaţii: $R_1, \ldots R_m$, adică:

$$R_1(v_1, v_2, \ldots, v_n, t) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_m(v_1, v_2, \ldots, v_n, t) = 0,$$

în care pentru uniformitatea scrierii dependenţa temporală a variabilelor nu a fost explicitată.

Relaţiile scrise conţin proprietatea de univocitate în sensul că, cunoscîndu-se evoluţia în timp a unor clase de variabile, celelalte se determină, cu precizarea anumitor „condiţii", în mod univoc. Această distincţie în cadrul mulţimii variabilelor: de variabile date şi de variabile determinate în funcţie de primele, cu specificarea anumitor „condiţii", este în general impusă de cauzalitate. Proprietatea ca relaţiile să fie în număr minimal, independente şi coerente se reflectă prin aceea că întotdeauna impunîndu-se prin cauzalitate un număr de variabile, celelalte sînt univoc determinate, specificate fiind anumite condiţii intrinsenci ale obiectului.

Caracterul de cauzalitate trebuie înţeles într-un mod foarte general, în sensul că selectarea variabilelor impuse este condiţionată de structura obiectului, de anumite pretenţii reclamate de destinaţia acestuia, cît şi de o serie de consideraţii şi cauze obiective externe.

Trebuie făcută precizarea că relaţiile $R_1, \ldots, R_m$ reflectă în general un dublu caracter:

— un caracter ce rezidă ca o consecinţă directă a unor legi fizice;

— un caracter care evidenţiază anumite conexiuni artificiale între variabile, anume create şi impuse de destinaţia obiectului şi care nu sînt consecinţa directă a unor legi fizice, de cît în mod indirect sub aspectul validităţii conexiunilor create.

O analiză mai atentă a obiectului şi a relaţiilor, sau în mod general, un punct de vedere în a considera obiectul, este introducerea unei orientări în descrierea acestuia. Această orientare, sub aspect general fiind o consecinţă a principiului cauzalităţii, obligă în mod

Scanned with OKEN Scanner

natural o anumită clasificare a variabilelor $v_1,\ldots,v_n$ dependente de timp, clasificare care evidenţiează în mod expres relaţia cauză-efect.

Clasificarea variabilelor $v_1, \ldots, v_n$, se va impune sub forma:

1) Variabilelor sau mărimilor de intrare notate generic x_i:

$$x_{i_1},\ldots,x_{i_q},$$

descrise matematic prin funcţii de timp.

Aceste variabile sau mărimi se pretează la un acces şi la o influenţare directă şi dorită de către om impunîndu-se în mod efectiv de către acesta o evoluţie dorită a obiectului în sensul satisfacerii pretenţiilor pentru care a fost creat obiectul.

2) Variabilelor sau mărimilor perturbatoare notate generic x_p:

$$x_{p_1}, \ldots, x_{p_l}.$$

Aceste variabile prezintă în general o dublă dependenţă: o dependenţă temporală şi o dependenţă de variabile aparţinînd unor cîmpuri de evenimente, descrierea globală a variabilelor x_p făcîndu-se printr-un proces stochastic.

3) Variabilelor sau mărimilor de ieşire, notate generic x_e:

$$x_{e_1},\ldots, x_{e_s},$$

a căror evoluţie este determinată de mulţimea variabilelor din primele două clase.

Din punct de vedere fizic o caracteristică obligatorie a acestor mărimi este posibilitatea de a fi observate, şi măsurate pretîndu-se în consecinţă la un acces fizic al omului asupra lor. Acest acces în unele cazuri influenţează şi determină evoluţia a o parte din mărimile enunţate sau se rezumă numai la stricta observare şi măsurare, evoluţia acestor variabile fiind în general independentă de voinţa omului, evidenţiindu-şi caracterul lor întîmplător.

Aşa dar se obţine următoarea partiţie a mulţimii variabilelor:

$$\{v_1,\ldots,v_n\} = \{x_{i_1},\ldots, x_{iq}\} \cup \{x_{p_1},\ldots, x_{p_l}\} \cup \{x_{e_1},\ldots, x_{e_s}\},$$

descrise prin funcţii de timp.

Primele două clase de mărimi prin faptul că influenţează în mod voit sau nevoit evoluţia celeilalte clase de mărimi, capătă denu-

Scanned with OKEN Scanner

mirea generală de variabile sau mărimi de conducere care se vor nota cu :

$$u_1, \ldots u_r,$$

şi care conţin atît dependenţa temporală cît şi cea aleatoare. Apare deci clasificarea :

$$\{v_1, \ldots, v_n\} = \{u_1, \ldots, u_r\} \cup \{x_{e1}, \ldots, x_{es}\},$$

clasificare care face mai evidentă proprietatea de orientabilitate a

Fig. 1

obiectului. Se obţine o reprezentare ca în figura 1, iar relaţiile care descriu obiectul vor fi de forma :

$$R_1(u_1, \ldots, u_r, x_{e_1}, \ldots, x_{e_s}t) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_m(u_1, \ldots u_r, x_{e_1}, \ldots x_{e_s}t) = 0.$$

Este comodă introducerea unei reprezentări vectoriale de forma: $u = (u_1, \ldots, u_r)$ — fiind un vector r-dimensional în care componentele sînt funcţii de timp, reprezentînd vectorul de conducere; $x_e = (x_{e_1}, \ldots, x_{es})$ — fiind un vector s-dimensional cu componentele funcţii de timp, reprezentînd vectorul de ieşire.

Se obţine atunci descrierea sistemului în forma :

$$R_1(u, x_e, t) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$R_m(u, x_e, t) = 0,$$

iar dacă se introduce vectorul funcţie :

$$R = (R_1, \ldots, R_m),$$

descrierea obiectului orientat se va face în forma :

$$R(u,\ x_e,\ t) = 0,$$

unde :

R este relație m-dimensională ;
u — vectorul de conducere, funcție de timp ;
x_e — vectorul de ieșire, funcție de timp.

Din punct de vedere matematic relația R descrie o univocitate a lui x_e în funcție de u, cu specificarea prealabilă a unor „condiții inițiale", adică dîndu-se vector funcția $u(t)$ și condițiile amintite $x_e(t)$ este determinat univoc, iar reciproc nu, adică obiectul fizic realizează o tranziție de la $u(t)$ către $x_e(t)$ și nu invers. Reversibilitatea este în majoritatea cazurilor imposibilă sau fără sens.

Operația R are un caracter general incluzînd o serie de posibilități operante sub aspect matematic : operații algebrice, diferențiale, integrale, etc.

În considerațiile făcute s-a plecat de la existența obiectului ajungîndu-se la descrierea acestuia prin relația

$$R(u,\ x_e,\ t) = 0,$$

care evidențiază orientabilitatea obiectului, iar prin precizarea unor „condiții inițiale", se realizează univocitatea lui $x_e(t)$ cauzat de $u(t)$.

Se pune problema și a unei reciprocități. Adică, dîndu-se relația vectorială R, există un corespondent fizic? În caz afirmativ se va spune că R are o realizare sau că admite o realizabilitate fizică.

În cele ce se dezvoltă în lucrare se va presupune de la început că este vorba numai de obiecte fizic realizabile aceasta presupunînd două aspecte :

— relația R corespunde efectiv unui obiect fizic realizabil ;
— orice modificare făcută în structura lui R va trebui efectuată astfel încît să corespundă unei modificări fizic realizabile în structura obiectului, și reciproc.

Relația R se mai numește și *modelul matematic abstract* al obiectului fizic.

Se va numi sistem, orice model matematic abstract, fizic realizabil printr-un obiect orientat.

1.2. NOȚIUNEA DE STARE

În cele de mai sus s-a amintit că univocitatea lui x_e de evoluția dată a lui u se realizează prin specificarea unor condiții inițiale.

Aceste condiții inițiale sînt furnizate de „starea" sistemului la momentul inițial t_0. Conceptul de stare se asociază conceptului intrare-ieșire în vederea posibilității de determinare univocă a lui $x_e(t)$ de $u(t)$.

Introducerea matematică a noțiunii de stare constă în:

a — precizarea condițiilor inițiale sau a stării inițiale printr-o mulțime de valori $s_{01}, s_{02} \ldots$ considerate în număr finit definind un vector de stare $s_0 = (s_{01}, s_{02} \ldots)$, vectorul s_0 se consideră ca valoarea vector-funcției de stare $s(t)$ la momentul t_0, adică $s(t_0) = s_0$.

b — dîndu-se evoluția vectorului de conducere $u(t)$ pentru $t \geqslant t_0$, relația R și $s(t_0)$ este posibilă determinarea univocă a vectorului de ieșire $x_e(t)$, $t \geqslant t_0$. Adică, este posibilă scrierea unică a unei relații explicite de forma:

$$x_e(t) = A(u(t),\ s(t_0)) = A(u(t),\ s_0),\ t \geqslant t_0;$$

c — pentru perechea $(u(t), s_0)$ vector funcția de stare $s(t)$ este univoc determinată, unde $s(t_0) = s_0$.

Condiția (c) trebuie interpretată în felul următor: dîndu-se perechea $(u(t), s_0)$ evoluția vectorilor funcție x_e și s este perfect determinată pentru $t \geqslant t_0$. Fie $t_1 \geqslant t_0$ și să considerăm evoluția perechii $(x_e(t), s(t))$ pentru $t \geqslant t_1$. Fie $s(t_1)$ starea sistemului la momentul considerat t_1. Atunci perechea $(x_e(t), s(t))$ pentru $t \geqslant t_1$ cu $x_e(t) = A(u(t), s(t_1))$, $t \geqslant t_1$ are o evoluție identică cu cea anterioară, pentru $t \geqslant t_1$.

Trebuie considerată ca o proprietate obiectivă posibilitatea asocierii la orice obiect orientat, descris prin modelul matematic R, a unui vector de stare s, evoluînd în așa numitul spațiu al stărilor Σ.

În consecință structural un sistem se va figura ca în figura 2.

Se fac următoarele două precizări:

— vectorul de stare $s(t) \in \Sigma$ — spațiul stărilor, este o mărime interioară a sistemului a cărui componente, fie că nu sînt în general

accesibile observării și măsurării, fie că nu este dorită sau necesară observarea și deci măsurarea lor;

— asocierea vectorului de stare, obiectului orientat și descris de modelul matematic R nu este în general univocă, adică pentru unul și același sistem există o infinitate de modalități de a considera vectorul de stare. O dată o modalitate aleasă ea se va considera ca atare. Cu alte cuvinte considerarea unei conexiuni: vector de conducere — vector de stare — vector de ieșire are un caracter evolutiv în timp univoc determinat, pentru sistemul considerat; în conexiune, prima și ultima mărime sînt exterioare sistemului, fiind accesibile,

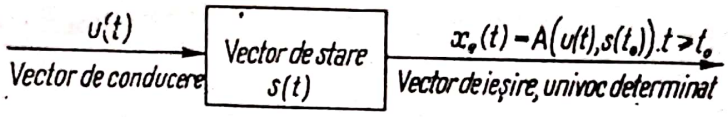


Fig. 2

iar cea din mijloc este o mărime interioară, în general neaccesibilă. În ceea ce privește notația, în cazul cînd $s(t)$ se descrie printr-un sistem de ecuații diferențiale ordinare în formă normală se va accepta notația $s(t) \Delta x(t)$, spațiul stărilor notîndu-se cu X — fiind un spațiu vectorial finit dimensional.

Evoluția vectorului stare $s(t)$ în spațiul Σ definește o traiectorie de stare, traiectoria fiind unică pentru un vector funcție de conducere $u(t)$ dat, și o stare inițială dată $s(t_0)$. În caz că unicitatea nu este respectată avem de a face cu un sistem singular.

Dacă $s(t_0) \neq 0$ și $u(t) \equiv 0$, atunci evoluția

$$x_e(t) = A(0,\ s(t_0))$$

se numește evoluția liberă a sistemului sau regimul său liber.

Se spune că $s(t_0)$ este o stare zero sau stare de condiții inițiale nule pentru mărimile exterioare sistemului, dacă

$$0 = A(0,\ s(t_0)).$$

Considerînd evoluția vectorului de stare univoc determinată de perechea $(u(t),\ s(t_0))$ se va scrie explicit: $s(t\,;\ u_{[t_0,\,t]},\ s(t_0))$ unde prin $u_{[t_0,\,t]}$ s-a descris întreaga evoluție a vectorului de conducere pe

intervalul de timp $[t_0, t]$. Se spune că $s(t_0)$ este o stare de echilibru a sistemului, dacă $s(t; 0, s(t_0)) = s(t_0)$.

În capitolele dezvoltate în lucrare starea sistemului se descrie printr-un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare scrise vectorial sub forma

$$\dot{x} = f(x, u, t).$$

Un sistem se numeşte liniar dacă prezintă proprietăţi de liniaritate în raport cu mărimile de conducere şi cu stările iniţiale adică :

$$1)\ A(\lambda u(t) + \mu v(t), s(t_0)) = \lambda A(u(t), s(t_0)) + \mu A(v(t), s(t_0)),$$

$$2)\ A(0, \lambda s'(t_0) + \mu s''(t_0)) = \lambda A(0, s'(t_0)) + \mu A(0, s''(t_0)),$$

adică, dacă se pretează la aplicarea principiului superpoziţiei atît în ceea ce priveşte mărimile de conducere cît şi în ceea ce priveşte stările acestuia, referitor la regimul liber.

Un caz frecvent de sistem liniar este cel descris de sistemul de ecuaţii diferenţiale ordinare liniare cu coeficienţi constanţi.

Un sistem se numeşte invariant în timp sau după alte definiţii staţionar în timp dacă proprietăţile intrinseci ale acestuia nu se modifică în raport cu timpul.

Acest lucru se exprimă matematic în felul următor. Fie evoluţia sistemului descrisă de

$$x_e(t) = A(u(t), s(t_0)),\ t \geqslant t_0,$$

să translăm în timp acest proces adică :

$$u(t) \text{ trece în } u(t - \tau),\ t \geqslant t_0 + \tau,$$

$$s(t_0) = s_0 \text{ trece în } s(t_0 + \tau) = s_0,$$

valoarea vectorului stare iniţială fiind aceeaşi.

Atunci evoluţia sistemului va fi

$$x'_e(t) = A(u(t - \tau), s(t_0 + \tau)),\ t \geqslant t_0 + \tau.$$

Sistemul este invariant în timp dacă :

$$x'_e(t) = x_e(t - \tau),\ t \geqslant t_0 + \tau,$$

adică dacă :

$$A(u(t - \tau),\ s(t_0 + \tau)) = A(u(t),\ s(t_0)),\ t \geqslant t_0 + \tau.$$

1.3. CONTROLABILITATE

Fie un sistem oarecare și o stare inițială $s_0 = s(t_0) \in \Sigma$. Se va spune că, starea $s_1 = s(t_1) \in \Sigma$ este accesibilă din starea s_0 dacă există o mărime de conducere $u(t)$ astfel încît traiectoria de stare

$$s(t) = s(t;\ u_{[t_0, t]},\ s_0),$$

să ajungă la momentul t_1 în starea s_1 adică

$$s_1 = s(t_1;\ u_{[t_0, t_1]},\ s_0).$$

Mulțimea tuturor stărilor accesibile din starea $s(t_0) = s_0$ se va nota $\Sigma(s_0)$. Evident, că fiecare stare din $\Sigma(s_0)$ este accesibilă din s_0 în timp diferit.

Se va spune că sistemul este controlabil din starea s_0 referitor la $\Sigma(s_0)$ sau că $\Sigma(s_0)$ este controlat de sistem din starea s_0.

Evident, că $\Sigma(s_0)$ este o parte a spațiului stărilor, neputînd fi îndreptățiți să considerăm că sistemul controlează orice stare din spațiul stărilor.

Sistemul se numește complet controlabil din starea s_0 dacă $\Sigma(s_0) = \Sigma$, adică dacă toate stările din spațiul stărilor sînt accesibile din starea s_0.

În fine, vom spune că sistemul este absolut controlabil dacă ori care ar fi două stări s_0, inițială și s_1 finală, există o mărime de conducere care transferă sistemul din starea s_0 în starea s_1.

Transferarea sistemului din starea s_0 în starea s_1 sub acțiunea unei mărimi de conducere $u(t)$ definește un *proces de conducere*.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul se numeşte observabil dacă orice tranziţie a sa în spaţiul stărilor este detectabilă prin intermediul mărimilor de ieşire, adică orice evoluţie a sistemului în spaţiu stărilor este percepută prin intermediul mărimilor de ieşire care sînt accesibile. Noţiunea de observabilitate este proprie mărimilor exterioare ale sistemului pentru că numai prin intermediul lor există un acces la sistem, mărimile de stare fiind mărimi interioare, fiind posibilă chiar existenţa fizică reală a acestora, dar prin însăşi natura lor sînt intrinseci şi neaccesibile în general.

În cele ce urmează se vor considera sisteme controlabile şi observabile adică, vor interveni numai stări posibil a fi controlate dintr-o stare iniţială, evoluţia în spaţiul stărilor fiind univoc sesizată prin intermediul mărimilor de ieşire.

1.4. ADAPTABILITATE

Noţiunea de adaptabilitate a unui sistem s-a impus ca fiind legată de obligativitatea ca acesta să satisfacă o clasă de calităţi rezultate din însăşi destinaţia pe care o are obiectul descris prin sistemul respectiv.

Evidenţierea acestor calităţi sau performanţe decurge dintr-o apreciere locală şi globală a comportării sistemului, comportarea analizată atît din punct de vedere al mărimilor exterioare acestuia cît şi al structurii interne a sistemului.

Se vor introduce două noţiuni fundamentale :

1) — operatorul de calitate ;

2) — mulţimea de performanţe.

Operatorul de calitate este definit pe mulţimea variabilelor exterioare sistemului şi va fi notat cu P. În consecinţă, cunoscîndu-se evoluţia acestor variabile pe un anumit interval de timp impus de durata procesului de conducere, adică cunoscîndu-se perechea : $u_{[t_0, t_1]}$, $x_{e[t_0, t_1]}$, operatorul P aplicat acestei perechi va furniza un număr de valori reale care descriu calitatea sau performanţele sistemului

$$P(u_{[t_0, t_1]}, \; x_{e[t_0, t_1]}) = (p_1, \cdots, p_l) = p,$$

unde p este un vector în spaţiul l-dimensional al performanţelor numit vectorul performanţă. O anumită parte a acestui spaţiu este

interesantă întrucît descrie acea mulțime de performanțe a căror valoare este dorită. Vom nota această parte cu S.

Pot apare două cazuri:

— $p \in S$ în care caz sistemul satisface pretențiile impuse funcționării sale, denumind comportarea admisibilă din punct de vedere al performanțelor;

— $p \notin S$ sau explicit $(p_1, \ldots, p_i) \notin S$, aceasta înseamnă că toate performanțele sau numai o parte din ele nu sînt satisfăcute, sistemul nefiind admisibil din punct de vedere al performanțelor.

Vom numi *adaptabilitate* proprietatea sistemului de a fi și a se menține admisibil din punct de vedere al performanțelor. Adică, în orice condiții

$$P(u_{[t_0, t_1]},\ x_{e[t_0, t_1]}) \in S.$$

Explicitînd pe x_e, rezultă

$$P(u_{[t_0, t_1]},\ A(u_{[t_0, t_1]},\ s_0)) \in S$$

în care se reamintește că u înglobează atît mărimile de intrare cît și cele perturbatoare, iar A este descris de structura intrinsecă a sistemului.

În consecință, cauzele care pot scoate sistemul din S, adică a-l face inadmisibil sub aspectul performanțelor, sînt de două categorii:

— cauze care intervin prin intermediul mărimilor perturbatoare x_p (modificînd pe u);

— cauze care se traduc prin modificarea parametrilor interni ai sistemului, care modifică starea acestuia, sau chiar structura lui, în fiecare caz producîndu-se o modificare a operatorului A.

Trebuie precizat că, cele două clase de cauze nu sînt izolate, ele putînd fi legate printr-o cauzalitate oarecare, adică variația unei anumite variabile exterioare să cauzeze variația unui parametru interior al sistemului. Este cazul sistemelor tipic neliniare.

În consecință, reacția sistemului, pentru a rămîne admisibil sub aspectul performanțelor, se poate realiza atît prin intermediul modificării în mod corespunzător a parametrilor interni sau chiar al structurii, cît și prin intervenția corespunzătoare a mărimilor de conducere, în sensul compensării sau combaterii influenței perturbațiilor.

Sistemele posedă un anumit grad de adaptabilitate naturală, însă realizarea efectivă a procesului de adaptare se face artificial prin adiționarea la obiectul fizic al unor dispozitive anume creiate.

Scanned with OKEN Scanner

Cel mai simplu, şi totodată cel mai simplist sistem adaptiv, îl reprezintă sistemele de reglare automată care reacţionează în funcţie de o mărime dedusă din mărimea de intrare şi cea de ieşire, care este eroarea ε (fig. 3).

În mod normal mărimea x_e urmăreşte sau este egală cu cea de intrare (sau aproape egală).

a. În cazul apariţiei unei perturbaţii modificarea mărimii de ieşire pe care aceasta o cauzează se traduce într-o variaţie corespunzătoare a erorii ε, aceasta conducînd la compensarea respectivă.

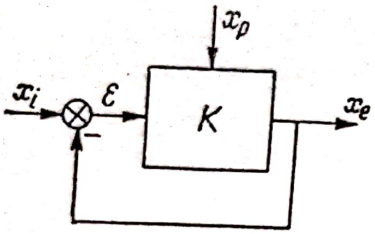


Fig. 3

b. În cazul unei modificări a unui parametru intern în cazul de faţă amplificarea K a sistemului (în stare deschisă) efectul legăturii inverse este diminuarea sau compensarea totală a variaţiei mărimii de ieşire cauzată de variaţia lui K.

Simplismul acestui sistem constă în faptul că lista de pretenţii este redusă şi în cazul cînd mulţimea S este mai bogată, nu se poate satisface, numai prin simpla existenţă a legăturii inverse, pretenţiile respective.

Un exemplu de operator de calitate îl reprezintă

$$P(x_{i_{[0,\infty)}},\ x_{e_{[0,\infty)}}) = \left(\sigma,\ x_e(\theta),\ \int_0^\infty |\varepsilon|^q\,dt\right) = (p_1,\ p_2,\ p_3),$$

unde :

$x_{i_{[0,\infty)}}$ este descris printr-o variaţie în treaptă ;

σ — supra reglajul sistemului ;

$x_e(\theta)$ — o anumită valoare a mărimii de ieşire la momentul dat ;

$\int_0^\infty |\varepsilon|^q\,dt$ — un indice global de performanţă.

În acest caz, mulţimea S (tridimensională) va fi descrisă de exemplu prin :

$$0 \leqslant p_1 \leqslant p_{1\,max} \text{ adică } 0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{max},$$

$$p_{2\,min} \leqslant p_2 \leqslant p_{2\,max} \text{ adică } x_{e\,min}(\theta) \leqslant x_e(\theta) \leqslant x_{e\,max}(\theta),$$

$$0 \leqslant p_3 \leqslant p_{3\,max} \text{ adică } 0 \leqslant \int_0^\infty |\varepsilon|^q\,dt \leqslant M,$$

după cum uşor se poate observa S este un paralelipiped dreptunghic. Trebuie făcută observaţia de principiu că impunerea mulţimii S trebuie să presupună o compatibilitate a performanţelor.

Procesul de adaptare se realizează pe două mari căi :

1 — adaptare structurală sau intrinsecă, sau adaptare internă ;

2 — adaptare prin mărimi de conducere sau extrinsecă, sau adaptare externă.

În cazul adaptării structurale sau intrinseci trebuie distinse două tipuri de subprocese de adaptare :

— unul continuu de modificare continuă a parametrilor interni, procesul de compensare realizîndu-se în mod continuu ;

— unul discret prin modificări bruşte de structură adică avînd un caracter comutaţional.

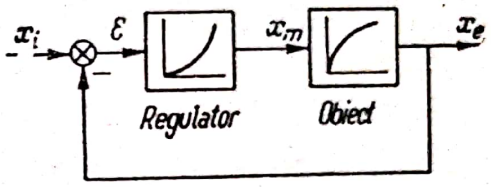


Fig. 4

Un exemplu de adaptare internă este redat în figura 4.

Amplificarea obiectului depinde de mărimea de execuţie x_m cu legea

$$K_a = K_{a_0} x_m^{p-1},$$

rezultînd

$$x_e = K_a x_m = K_{a_0} x_m^p$$

Dacă regulatorul realizează dependenţa

$$x_m = K_{b_0}^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

adică, amplificarea acestuia are legea

$$K_b = K_{b_0}^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}-1}$$

va rezulta

$$x_e = K_{a_0}(K_{b_0}^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}})^p = K_{a_0} K_{a_0} \varepsilon = K\varepsilon,$$

unde $K = \text{const.}$

În cazul adaptării externe procesul de adaptare se poate realiza :

— în circuit deschis ;

— în circuit închis.

Scanned with OKEN Scanner

Primului caz îi corespunde schema din figura 5 unde, x_a este o mărime de adaptare aparţinînd evident clasei mărimilor de intrare.

Celui de al doilea caz, îi corespunde schema din figura 6.

Din însăşi schema structurală de mai sus, rezultă că mărimea de conducere x_c este rezultatul atît al mărimii de adaptare cît şi

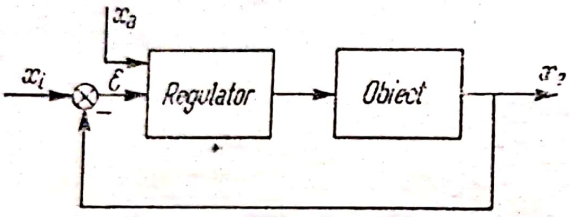


Fig. 5

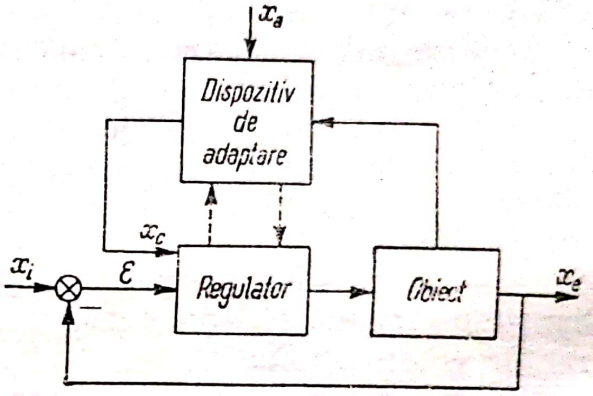


Fig. 6

al mărimilor culese din cele două elemente structurale şi care evidenţiază efectul de adaptare.

În concluzie, noţiunea de adaptabilitate a unui sistem se asociază capabilităţii acestuia de a se menţine într-o clasă de proprietăţi compatibile, impuse apriori.

1.5. OPTIMALITATE

Optimalitatea se înscrie ca un caz particular de adaptabilitate în sensul că, se urmăreşre extremizarea uneia sau mai multor performanţe, extremizare care în acest caz poartă numele de optimizare.

Optimizarea în consecinţă localizează vectorul performanţă pe frontiera mulţimii S.

Procesul de extremizare vizează în general anumite componente ale vectorului de performanţă, în general acele componente care dau o caracterizare globală a procesului.

Sub aspect fizico-matematic procesul de extremizare nu revine la o determinare a unor extreme analitice, ci la determinarea unor extreme cu restricţii. În consecinţă, în acest caz, teoria variaţională

clasică se dovedește a fi insuficientă, recurgîndu-se la instrumentul programării matematice.

Un proces de optimizare revine deci la un proces de adaptare de tipul

$$P(u_{[t_0, t_1]}, x_{e[t_0, t_1]}) \in F_r(S),$$

unde $F_r(S)$ este frontiera mulțimii S a performanțelor.

Optimizarea se poate ierarhiza sub două aspecte:

— optimizare staționară, în care dinamica procesului de conducere nu este interesantă, traducîndu-se prin maximizarea sau minimizarea unei *funcții*;

— optimizare asociată procesului de conducere și care generează de fapt clasa sistemelor optimale, revenind matematic la maximizarea sau minimizarea unei *funcționale*.

În primul caz operatorul de performanță P acționează asupra valorilor staționare a mărimilor exterioare ale sistemului, adică

$$P(\lim_{t\to\infty} u(t), \lim_{t\to\infty} x_e(t)) \equiv max \text{ sau } min.$$

Notînd

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u_s \text{ și } \lim_{t\to\infty} x_e(t) = x_{e_s},$$

problema revine la

$$P(u_s, x_{e_s}) \equiv max \text{ sau } min$$
$$+$$
$$restricții$$

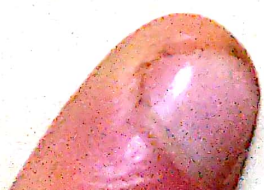
adică o problemă strictă de programare matematică staționară.

Sistemele care realizează astfel de extremizări neasociate procesului de conducere, în care evoluția $(u_{[t_0, \infty)}, x_{e[t_0, \infty)})$ nu este interesantă, se numesc *sisteme extremale*.

În cel de al doilea caz, al optimalității propriuzise, formularea procesului de optimizare se face comod la nivelul spațiului stărilor.

Fie un sistem oarecare avînd la momentul t_0 starea s_0 și fie $s_1 \in \Sigma(s_0)$ o stare controlabilă a sistemului. Sistemul se consideră observabil referitor la aceste două stări.

Evident există o mulțime de posibilități de a ajunge din starea s_0 în starea s_1, reprezentată prin existența mai multor traiectorii $s(t; u_{[t_0, t_1]}, s_0)$ care unesc s_0 cu s_1.



Sistemul fiind observabil se asociază în mod univoc evoluției stării sistemului, evoluția evident observabilă și măsurabilă, a mărimilor de ieșire. Astfel, este determinat vectorul performanță $p = P(u_{[t_0, t_1]}\, x_{e[t_0, t_1]})$ care poate fi asociat traiectoriei de stare, asociere posibilă datorită observabilității sistemului. Pentru comoditate, acest lucru fiind de altfel frecvent, se va considera vectorul p unidimensional, componenta se va nota cu J, notație consacrată unei funcționale. Așadar, funcționala J, este definită pe clasa tuturor mărimilor de conducere u care conduc sistemul din starea s_0 în starea s_1, adică

$$J = J(u_{[t_0, t_1]},\ s_0,\ s_1),$$

unde introducerea stărilor s_0 și s_1 s-a făcut pentru evidențierea începutului și sfîrșitului procesului de conducere, implicit pentru a se vedea selecția mărimilor de conducere.

Trebuie remarcat ca un fapt esențial, existența restricțiilor atît în ceea ce privește valorile $u(t)$ ale vectorului de conducere cît și poziționarea traiectoriei în spațiul stărilor. Astfel, admisibilitatea unei comenzi este impusă de doi factori : conducerea din starea s_0 în starea s_1 ; respectarea restricțiilor, restricții care în general sînt de tip inegalitate.

Problema de optimalitate se enunță astfel : dintre comenzile care conduc sistemul din starea s_0 în s_1, compatibil cu mulțimea restricțiilor impuse procesului de conducere, să se determine o comandă, numită optimală, $\bar{u}$ pentru care

$$J(\bar{u}_{[t_0, \bar{t}_1]},\ s_0,\ s_1) = \min_{u[t_0, t_1]} J(u_{[t_0, t_1]},\ s_0,\ s_1),$$

împreună cu restricțiile de conducere (determinate de operatorul A cu referire la mărimea de conducere prin componența sa x_{i_j}).

Datorită prezenței restricțiilor, extremizarea funcționalei J nu se poate face prin procedeul diferențialei Gateaux

$$\left.\frac{\partial J(u + \mu v)}{\partial \mu}\right|_{\mu = 0} = 0.$$

Răspunsul general la această problemă este dat de principiul programării dinamice.

Scanned with OKEN Scanner

În general, teoria matematică a extremizării funcționalelor este operantă pentru funcționalele liniare ; s-a căutat ca performanțele globale să se exprime prin funcționale liniare. Cum orice funcțională liniară continuă să exprime printr-o integrală rezultă că J se va exprima printr-o integrală.

Considerînd evoluția sistemului descrisă printr-un sistem de ecuații diferențiale ordinare în forma normală se obține

$$\dot{x} = f(x,\ u,\ t),$$

unde :

x — vector de stare n-dimensional ;
u — vector de conducere r-dimensional ;
f — vector funcție n-dimensională ;

se va considera funcționala liniară J de forma

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,\ u,\ t)\ \mathrm{d}t,$$

unde f^0 este o funcție o convenabil aleasă.

În cazul sistemelor automate a căror evoluție este nemijlocit dictată de eroare se impune ca una din componentele vectorului x să fie eroarea ε a sistemului.

Din acest punct de vedere indicii de performanță integrali se mai numesc indici integrali ai erorii sistemului, un exemplu tipic formîndu-l indicele de forma

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\ |\ \varepsilon(t)\ |^q\ \mathrm{d}t,$$

numit indicele integral ponderat al erorii, avînd ca un caz particular $\varphi(t) = 1,\ q = 2,\ t_1 = \infty$, adică

$$J = \int_{t_0}^{\infty} |\ \varepsilon(t)\ |^2\ \mathrm{d}t \equiv min,$$

generînd criteriul clasic al minimizării erorii medii pătratice.

Scanned with OKEN Scanner

Teoria matematică a minimizării funcţionalelor liniare supuse restricţiilor a fost rezolvată de către principiul maximului lui L.S. Pontriaghin care va fi dezvoltat în capitolul următor.

Exprimarea indicelui de performanţă printr-un criteriu integral oferă multe posibilităţi de evidenţiere a optimalităţii.

Acest lucru se realizează prin alegerea convenabilă a limitelor integralei generîndu-se astfel aşa numitele probleme de optimizare cu timp impus sau timp liber, precum şi prin forma funcţiei f^0.

Un exemplu concludent îl reprezintă minimizarea timpului de conducere evident în prezenţa restricţiilor.

În acest caz, funcţionala se scrie

$$J = \int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt = t_1 - t_0 \equiv min.$$

Un alt caz tipic este minimizarea energetică pe un interval de timp impus $[t_0, t_1]$ în care funcţionala devine :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^T A x + u^T B u) \, dt,$$

formele pătratice $x^T A x$ şi $u^T B u$ fiind pozitiv definite, iar vectorul de stare înglobînd eroarea sistemului.

Problema de optimalitate se poate extinde prin considerarea nu a unei stări finale x_1 ci a unei varietăţi finale, adică procesul de conducere să se desfăşoare între o stare iniţială şi un punct oarecare plasat pe o suprafaţă dată în spaţiul stărilor. Se generează astfel, problemele de optimizare cu extreme mobile, în care se încadrează şi aşa numitele probleme de „lovire optimă a ţintei mişcătoare".

Este interesant de arătat că problemele de optimalitate se pot transpune într-o extremizare a poziţiei terminale a procesului de conducere optimalitatea caracterizîndu-se printr-un proces de conducere a cărei stare finală este cea mai aproape posibilă de o anumită stare dată.

Într-adevăr fie procesul de conducere descris de

$$\dot{x} = f(x,u,t) \quad \text{cu} \quad x(t_0) = x_0 .$$

Scanned with OKEN Scanner

Se introduce coordonata x^0 prin

$$\dot{x}^0 = f^0(x, u, t) \text{ cu } x^0(t_0) = 0,$$

atunci

$$x^0(t_1) = x^0(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u, t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u, t)\,\mathrm{d}t = J.$$

Notînd cu $\hat{X}$ spațiul stărilor X, extins cu o dimensiune, se obține un proces de conducere descris de

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(x, u, t) \text{ cu } \hat{x}(t_0) = (0, x_0),$$

și unde

$$\hat{x}(t_1) = (J, x_1),$$

așadar optimalizarea revine la

$$\|(0, x_1) - (J, x_1)\| \equiv min.$$

În general, se poate da formularea

$$\|\hat{\bar{x}}_1 - \hat{x}(t_1)\| \equiv min.$$

În capitolele care urmează, se va aborda teoria proceselor optimale pentru sistemele descrise de ecuațiile de stare în formă normală și cu indici de performanță integrali.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

FUNDAMENTUL MATEMATIC AL TEORIEI SISTEMELOR OPTIMALE

2.1. INTRODUCERE

Aşa cum s-a văzut în capitolul anterior, în cazul unui proces de conducere optimală prin strategii continue, descris de un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare şi un indice de performanţă integral, aspectul formulării matematice este propriu calculului variaţional.

Datorită restricţiilor care intervin, formalismul Euler-Lagrange întîmpină dificultăţi de aplicare în anumite cazuri, fiind complet neutilizabil, astfel încît instrumentul teoriei variaţionale clasice devine practic nefolositor.

După cum este cunoscut, impedimentele de aplicabilitate ale metodelor variaţionale obişnuite au fost depăşite prin revoluţionarea acestora de către introducerea principiului maximului a lui L. S. Pontreaghin şi a programării dinamice, elaborată de R. Bellman, între cele două principii existînd o interconexiune de fond.

Iniţial, prin însăşi esenţa lor, cele două principii au furnizat numai condiţii necesare de optimalitate; în ultima vreme însă, în special prin lucrările lui V. G. Bolteanski, s-au pus la punct ipoteze care permit şi formularea unor condiţii de suficienţă.

Un rol important l-a jucat, atît sub aspectul tehnicii de demonstrare, cît şi a opticii generale a suportului matematic al teoriei proceselor optimale, principiul generalizat al multiplicatorilor, elaborat de M. R. Hestenes, principiu care permite evitarea unor dificultăţi legate de controlabilitatea în conul terminal al lui Pontreaghin, prin folosirea ingenioasă a principiului punctului fix al lui Schauder.

În cele ce urmează se va încerca o prezentare matematică unitară a principiilor amintite, în special sub aspectul formalismului

Scanned with OKEN Scanner

lui Hestenes, a conexiunilor mutuale cu celelalte procedee variaţionale tradiţionale. De asemenea se va acorda atenţie problemelor legate de existenţa şi de unicitatea strategiilor optimale continue.

2.2. PRINCIPIUL GENERAL AL SEPARABILITĂŢII

2.2.1. CON DE VARIAŢIE. MULŢIME DERIVATĂ. CON DERIVAT

Fie $A \subset R^n$ o parte a spaţiului euclidian n-dimensional şi fie $x_0 \in A$ un punct arbitrar al acestei mulţimi. Se va nota $X(x_0)$ translatul lui R^n în x_0, astfel că în acest spaţiu toţi vectorii îşi au originea în x_0.

Fie $\xi_1, \ldots, \xi_m$ m vectori arbitrari în $X(x_0)$ şi fie mulţimea $K(x_0) \subset X(x_0)$ definită prin

$$K(x_0) = \left\{ \xi \mid \xi = \sum_{i=1}^{m} \delta\tau^i \xi_i,\ \delta\tau^i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m \right\},$$

definind un con convex generat de vectorii consideraţi.

Se spune că $K(x_0)$ este un *con de variaţie* al mulţimii A cu vîrful în x_0 dacă pentru orice $M > 0$ există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît, oricare ar fi

$$\delta\tau = (\delta\tau^1, \ldots, \delta\tau^m) \in \underbrace{[0, M] \times \ldots \times [0, M]}_{m} = C^m(M),$$

unde $C^m(M)$ este cubul pozitiv m dimensional a cărui latură are lungimea M, funcţia vectorială

$$x : C^m(M) \times [0, \varepsilon_0] \to R^n,$$

definită prin

$$x = x_0 + \varepsilon\xi + 0(\varepsilon),$$

unde

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

este continuă, iar $x \in A$ (pentru orice $\delta\tau \in C^m(M)$ şi $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$).

Mulţimea $M_D(x_0) \subset X(x_0)$ este o *mulţime derivată* a lui A relativ la x_0 dacă, oricare ar fi vectorii $\xi_1, \ldots, \xi_m$ din $M_D(x_0)$ cu m întreg arbitrar, aceştia generează un con de variaţie $K(x_0)$ al mulţimii A.

Un con convex $K_D(x_0) \subset X(x_0)$ (cu vîrful în x_0) se numeşte *con derivat* al mulţimii A relativ la x_0 dacă este în acelaşi timp şi o mulţime derivată.

PROPOZIŢIA 1. Orice con convex $K_D(x_0)$ generat de o mulţime derivată $M_D(x_0)$ a lui A relativă la x_0 este un con derivat.

Demonstraţie. Fie $\xi_1, \ldots, \xi_m \in K_D(x_0)$ şi să arătăm că aceştia generează un con de variaţie a lui A. Evident, există $\eta_1, \ldots, \eta_p$ în $M_D(x_0)$, astfel încît

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{p} \delta\tau_i^k \eta_k, \quad \delta\tau_i^k \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, p.$$

Un vector ξ oarecare al conului $K_D(x_0)$ generat de vectorii $\xi_1, \ldots, \xi_m$ se scrie

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \delta\tau^i \xi_i = \sum_{i,k=1}^{m,p} \delta\tau^i \delta\tau_i^k \eta_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \delta\tau^i \delta\tau_i^k \right) \eta_k.$$

Notînd

$$\delta\theta^k = \sum_{i=1}^{m} \delta\tau^i \delta\tau_i^k \geqslant 0,$$

se obţine în definitiv

$$\xi = \sum_{k=1}^{p} \delta\theta^k \eta_k,$$

deci ξ este un vector al conului convex generat de vectorii mulţimei derivate $M_D(x_0)$ şi, în consecinţă, există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît

$$x = x_0 + \varepsilon\xi + 0(\varepsilon) \in A,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

şi $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$

Observaţii. 1. Trebuie remarcat că nu există un singur con de variaţie sau o singură mulţime derivată ori un singur con derivat al unei mulţimi oarecare referitor la un punct arbitrar al ei.

2. Extensiunea de la mulţimea derivată la conul derivat este imediată, astfel că, dacă iniţial este vorba de prima noţiune, se poate imediat trece la cea de-a doua.

2.2.2. PUNCT EXTREM AL UNEI MULŢIMI ÎN RAPORT CU O AXĂ DE COORDONATE

Să considerăm o mulţime $A \subset R^n$ şi fie $\bar{x} \in A$ definit prin coordonatele sale carteziene $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$.

Se spune că $\bar{x}$ este un punct extrem* în raport cu coordonata k dacă

$$\bar{x}^k = \inf \{x^k \mid (\bar{x}^1, \ldots, x^k, \ldots, \bar{x}^n) \in A\}.$$

În cele ce urmează ne vom referi la puncte extreme în raport cu prima coordonată. În general, pentru comoditate vom face raţionamentele în spaţiul $X(\bar{x})$, unde $\bar{x}$ este un punct extrem în raport cu prima coordonată. Evident, vom lua în considerare punctele extreme cu norma finită.

Observaţie. Dacă A este un compact, el are puncte extreme de normă finită în raport cu toate axele de coordonate.

2.2.3. SEPARABILITATEA ÎN PUNCTELE EXTREME

Fie $A \subset R^n$, $\bar{x} \in A$ un punct extrem al mulţimii A în raport cu axa x^1 şi fie $X(\bar{x})$ translatul lui R^n în $\bar{x}$.

Să considerăm de asemenea că există o mulţime derivată $M_D(\bar{x})$ a lui A relativă la $\bar{x}$. În acest caz se poate vorbi imediat de

---

* Ar mai fi fost necesar de specificat şi „inferior".

Scanned with OKEN Scanner

un con derivat $K_D(\bar{x})$, generat de mulțimea derivată $M_D(\bar{x})$ conform propoziției 1 de la 2.2.1. În condițiile de mai sus se poate enunța următoarea teoremă.

TEOREMA 1 (teorema de separabilitate). *Semidreapta D^- din $X(\bar{x})$, definită de $\bar{x}=(0,\ldots,0)$ * și de vectorul $(-1,0,\ldots,0)$, nu este conținută în interiorul conului $K_D(\bar{x})$.*

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că $D^- \subset \mathring{K}_D(\bar{x})$. Fie $\xi^* \in D^-$, $\xi^* \neq 0$ originea lui $X(\bar{x})$. Evident, $\xi^* = (\xi^{1*}, 0, \ldots, 0)$, unde $\xi^{1*} < 0$. Există atunci un sferoid închis $\overline{V}_r(\xi^*) \subset K_D(\bar{x})$. Fie hiperplanul P perpendicular pe D^- în punctul ξ^*. Acesta va intersecta $\overline{V}_r(\xi^*)$ după discul circular $D_r(\xi^*)$ ortogonal lui D^-. Fie $e_1, \ldots e_{n-1}$ o bază în P cu originea în ξ^* și cu extremitățile pe cercul definit de frontiera $Fr\,(D_r(\xi^*))$ a discului circular. Se definește

$$e_n = -(e_1 + \ldots + e_{n-1}).$$

Atunci vectorii din $X(\bar{x})$:

$$\xi_1 = \xi^* + e_1, \ldots, \quad \xi_n = \xi^* + e_n,$$

sînt în $K_D(\bar{x})$ și sînt liniari independenți. Într-adevăr. Prima proprietate rezultă imediat din faptul că $K_D(\bar{x})$ este un con convex. A doua proprietate se demontrează prin absurd. Să presupunem că există $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ nu toți nuli, astfel încît

$$\lambda^1 \xi_1 + \ldots + \lambda^n \xi_n = 0,$$

adică

$$\lambda^1(\xi^* + e_1) + \ldots + \lambda^{n-1}(\xi^* + e_{n-1}) + \lambda^n(\xi^* - e_1, - \ldots - e_{n-1}) =$$

$$= (\lambda^1 + \ldots + \lambda^n)\xi^* + (\lambda^1 - \lambda^n)e_1 + \ldots + (\lambda^{n-1} - \lambda^n)e_{n-1} = 0$$

sau, cu notații evidente,

$$\mu^0 \xi^* + \mu^1 e_1 + \ldots + \mu^{n-1} e_{n-1} = 0, \qquad (\alpha)$$

* Scris în coordonatele spațiului translat $X(\bar{x})$, $\bar{x}$ fiind origina acestuia.

unde $\mu^0, \ldots, \mu^{n-1}$ nu sînt toţi nuli, căci în caz contrar ar rezulta imediat că

$$\lambda^1 = \ldots = \lambda^{n-1} = \lambda^n = 0,$$

ceea ce nu este adevărat.

Or, ξ^* este ortogonal bazei $e_1, \ldots e_{n-1}$ în $X(\bar{x})$, deci $\xi^*, e_1, \ldots, e_{n-1}$ este o bază în $X(\bar{x})$ şi deci relaţia (α) este falsă.

Evident, vectorii

$$\xi_1^* = \frac{\xi_1}{n}, \ldots, \quad \xi_n^* = \frac{\xi_n}{n}$$

posedă ambele proprietăţi amintite mai sus şi, în plus,

$$\xi_1^* + \ldots + \xi_n^* = \frac{1}{n}(n\xi^* + e_1 + \ldots + e_{n-1} + e_n) = \xi^*.$$

Rezultă ca o consecinţă imediată că:

a) matricea

$$\Xi = [\xi_j^{*i}] = \begin{bmatrix} \xi_1^{*1} & \ldots & \xi_n^{*1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{*n} & \ldots & \xi_n^{*n} \end{bmatrix}$$

are rangul n;

b) suma elementelor pe ultimele n—1 linii este nulă, iar suma elementelor primei linii este egală cu ξ^{1*} fiind strict negativă.

Să considerăm acum variabila n dimensională:

$$\delta\tau = (\delta\tau^1, \ldots, \delta\tau^n,) \equiv (1 + \delta\theta^1, \ldots, 1 + \delta\theta^n),$$

parcurgînd sferoidul închis unitar de centru $(1, \ldots, 1)$, definit de

$$(\delta\theta^1)^2 + \ldots + (\delta\theta^n)^2 \leqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În felul acesta, variabilele $\delta\tau^1, \ldots, \delta\tau^n$ sînt mereu pozitive şi nu simultan nule, iar $\delta\tau \in C^n(2)$, unde $C^n(2)$ este cubul pozitiv n dimensional de latură 2 (totdeauna $n \geqslant 2$).

Fie

$$\xi : \overline{V}_1(1) \to X(\bar{x}), \ \overline{V}_1(1) \subset C^n(2),$$

prin

$$\xi(\delta\tau) = \sum_{i=1}^{n} \delta\tau^i \xi_i^*.$$

Rezultă

$$\xi(\delta\tau) = \sum_{i=1}^{n} (1 + \delta\theta^i)\, \xi_i^* = \xi^* + \sum_{i=1}^{n} \delta\theta^i \xi_i^* = \tilde{\xi}(\delta\theta),$$

unde

$$\delta\theta = (\delta\theta^1, \ldots, \delta\theta^n) \in \overline{V}_1(0),$$

iar

$$\tilde{\xi} : \overline{V}_1(0) \to X(\bar{x}).$$

Evident, atunci cînd $\delta\tau$ parcurge $\overline{V}_1(1)$ sau $\delta\theta$ parcurge $\overline{V}_1(0)$ $\xi(\delta\tau)$ sau în cea de a doua reprezentare $\tilde{\xi}(\delta\theta)$, descrie un compact C în $K_D(\bar{x})$ datorită pozitivităţii variabilelor $\delta\tau^i$.

Compactul C intersectează semidreapta D^-. Într-adevăr, pentru $\delta\theta = 0$ avem

$$\tilde{\xi}(0) = \xi^*.$$

De asemenea se vede imediat că $\bar{x} \in C$, căci $\delta\tau \neq 0$ pentru orice $\delta\theta \in \overline{V}_1(1)$. Există $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît

$$x : \overline{V}_1(0) \times [0, \varepsilon_0] \to R^n,$$

prin

$$x(\delta\theta, \varepsilon) = \bar{x} + \varepsilon\tilde{\xi}(\delta\theta) + 0(\varepsilon),$$

unde $x(\delta\theta, \varepsilon)$ aparţine mulţimii A şi este continuă, proprietate care rezultă din faptul că $K_D(\bar{x})$ este un con derivat.

Atunci

$$x(\delta\theta, \varepsilon) - \bar{x} = \varepsilon\, \tilde{\xi}(\delta\theta) + 0(\varepsilon)$$

descrie un compact $Q(\varepsilon)$, ε — omotetic cu C şi $0(\varepsilon)$ — deplasat, *conţinut în întregime în A*.

Se pune problema următoare: există un $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ suficient de mic astfel ca $Q(\varepsilon)$, datorită $0(\varepsilon)$ — deplasării, să mai intersecteze semidreapta D^- într-un punct diferit de $\bar{x}$, semidreapta D^- fiind descrisă de $\varepsilon\xi^*$ cu $\varepsilon \geqslant 0$ ca parametru?

Cu alte cuvinte, se pune problema existenţei unei perechi $(\delta\theta^*, \varepsilon^*) \in \overline{V}_1(0) \times (0, \varepsilon_0]$ astfel ca q, definită de

$$q(\varepsilon, \delta\theta) = x(\delta\theta, \varepsilon) - \bar{x} - \varepsilon\xi^*,$$

să se anuleze în $(\delta\theta^*, \varepsilon^*)$. Explicitînd funcţia q, rezultă

$$q(\varepsilon, \delta\theta) = \varepsilon\tilde{\xi}(\delta\theta) + 0(\varepsilon) - \varepsilon\xi^* = \varepsilon\xi^* + \varepsilon\, \Xi\, \delta\theta + 0(\varepsilon) - \varepsilon\xi^*$$

sau, în definitiv,

$$\frac{q(\varepsilon, \delta\theta)}{\varepsilon} = \Xi\, \delta\theta + \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

iar din definiţia funcţiei q

$$\frac{x(\delta\theta, \varepsilon) - \bar{x}}{\varepsilon} - \xi^* = \frac{q(\varepsilon, \delta\theta)}{\varepsilon}.$$

Considerînd ecuaţia

$$\Xi\, \delta\theta + \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0,$$

soluţiile sînt de forma

$$\delta\theta = -\Xi^{-1} \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

unde Ξ^{-1} există.

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît

$$\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{x(\delta\theta, \varepsilon) - \bar{x}}{\varepsilon} - \xi^* - \Xi\,\delta\theta,$$

se poate scrie pentru o bună explicitare

$$\varphi(\delta\theta, \varepsilon) = \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

unde $\varphi : \overline{V}_1(0) \times (0, \varepsilon_0] \to R^n$ *continuă* şi unde $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\delta\theta, \varepsilon) = 0$. Conform ultimei proprietăţi, funcţia poate fi extinsă şi pentru $\varepsilon = 0$, luînd valoarea zero. Aşadar $\varphi : \overline{V}_1(0) \times [0, \varepsilon_0] \to R^n$ prin

$$\varphi(\delta\theta, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}, & \text{pentru } \varepsilon \neq 0, \\ 0, & \text{pentru } \varepsilon = 0, \end{cases}$$

este continuă.

Fie acum

$$\psi : \overline{V}_1(0) \times [0, \varepsilon_0] \to R^n,$$

prin

$$\psi(\delta\theta, \varepsilon) = -\Xi^{-1}\,\varphi(\delta\theta, \varepsilon),$$

care descrie de fapt „soluţia" de mai sus.

Atunci

$$\| \psi(\delta\theta, \varepsilon) \| \leqslant \| \Xi^{-1} \| \, \| \varphi(\delta\theta, \varepsilon) \|.$$

Fie

$$\sigma : [0, \varepsilon_0] \to R^1,$$

prin

$$\sigma(\varepsilon) = \sup_{\delta\theta \in \overline{V}_1(0)} \| \Xi^{-1} \| \, \| \varphi(\delta\theta, \varepsilon) \|,$$

care, evident, este bine definită, φ fiind continuă în compactul $\overline{V}_1(0)$, iar $\sigma(\varepsilon) > 0$.

Atunci

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma(\varepsilon) = 0.$$

Într-adevăr, să presupunem contrarul, adică $\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma(\varepsilon) = \alpha > 0$. Există $\varepsilon_k \to 0$, astfel ca $\sigma(\varepsilon_k) \to \alpha$. Datorită continuității lui φ pe compactul $\overline{V}_1(0)$, există $\delta\theta_k$ astfel că

$$\sigma(\varepsilon_k) = \sup_{\delta\theta \in \overline{V}_1(0)} \| \Xi^{-1} \| \, \| \varphi(\delta\theta, \varepsilon_k) \| = \| \Xi^{-1} \| \, \| \varphi(\delta\theta_k, \varepsilon_k) \| .$$

Datorită compacticității, $\delta\theta_k$ poate fi presupus convergent către $\delta\theta_0$ și deci, conform continuității,

$$\| \Xi^{-1} \| \, \| \varphi(\delta\theta_k, \varepsilon_k) \| \to \| \Xi^{-1} \| \, \| \varphi(\delta\theta_0, 0) \| = 0.$$

Adică $\sigma(\varepsilon_k) \to 0$, ceea ce este absurd.
Fie atunci $\varepsilon_0^* \in (0, \varepsilon_0]$, astfel ca $\sigma(\varepsilon_0^*) \leqslant 1$.
Atunci

$$\| \psi(\delta\theta, \varepsilon_0^*) \| \leqslant \sigma(\varepsilon_0^*) \leqslant 1.$$

Așadar, aplicația $\psi(\cdot, \varepsilon_0^*)$, definită pe $\overline{V}_1(0)$, aplică acest sferoid închis în el însuși.

Există deci, conform principiului lui Schauder, un punct fix al aplicației $\psi(\cdot, \varepsilon_0^*)$, adică

$$\psi(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) = \delta\theta(\varepsilon_0^*) = -\Xi^{-1} \varphi(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*).$$

Va rezulta că

$$\frac{x(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) - \bar{x}}{\varepsilon_0^*} - \xi^* = 0, \; x(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) \in A,$$

căci

$$\delta\theta(\varepsilon_0^*) \in \overline{V}_1(0).$$

Scriind pe componente egalitățile de mai sus, se obține

$$x^1(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) = x^1 + \varepsilon_0^* \xi^{*1} < x^1, \; x^k(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) = \bar{x}^k, \; 2 \leqslant k \leqslant n$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\bar{x} \in A$ nu este punct extrem în raport cu prima coordonată, datorită primei inegalităţi de mai sus, contradicţie care demonstrează complet teorema.

Observaţii. 1. $Q(\varepsilon_0^*)$ intersectează deci D^- într-un punct diferit de D^-, fapt în care constă esenţa geometrică a contradicţiei ce rezultă din considerentul că $D^- \subset \overset{\circ}{K}_D(\bar{x})$. Acest punct este, după cum s-a văzut, $x(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*)$.

2. Dacă $\varepsilon_0^* \to 0$, atunci $\delta\theta(\varepsilon_0^*) \to 0$.

Într-adevăr, se poate vorbi despre

$$\psi(\cdot, \varepsilon) : \overline{V}_{\sigma(\varepsilon)}(0) \to \overline{V}_{\sigma(\varepsilon)}(0), \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0^*)$$

şi, evident, cînd $\varepsilon_0^* \to 0$ sferoidul tinde spre centrul lui împreună cu punctul fix.

3. Inegalitatea $n \geqslant 2$ este necesară pentru ca sferoidul $\overline{V}_1(0)$ să existe efectiv, adică să fie cel puţin un cerc. Acest lucru este asigurat de faptul că, aşa cum se va vedea la 2.3, cel puţin o dimensiune este ocupată de procesul de conducere, iar o dimensiune de indicele de performanţă ataşat.

Corolar important. Există un hiperplan de separaţie între D^- şi $K_D(\bar{x})$.

Acest lucru este o consecinţă a faptului că D^- şi $K_D(\bar{x})$ sînt mulţimi convexe cu interioarele disjuncte şi deci separabile.

Se poate enunţa atunci următoarea :

TEOREMĂ FUNDAMENTALĂ. *Fie*

1. $A \subset R^n$ — o mulţime oarecare.

2. $\bar{x} \in A$ — un punct extrem în raport cu prima coordonată. Presupunem că există o mulţime derivată $M_D(\bar{x})$ a lui A relativ la $\bar{x}$. Atunci există $\lambda \in R^n$, $\lambda \neq 0$ astfel încît

a) *pentru orice $\xi \in M_D(\bar{x})$ (considerat în $X(\bar{x})$) are loc inegalitatea*

$$<\xi, \lambda> \leqslant 0;$$

b) *considerînd*

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

atunci

$$\lambda_1 \leqslant 0.$$

Demonstrație. Conform corolarului de mai sus aplicabil în acest caz, considerăm normala $\lambda \neq 0$ la hiperplanul de separație, plasat în semispațiul care conține semidreapta D^-. Atunci, evident,

$$<\lambda, \xi> \leqslant 0$$

pentru orice $\xi \in K_D(\bar{x})$ și cu atît mai mult pentru orice $\xi \in M_D(\bar{x})$.

În același timp,

$$<(-1, 0, \ldots, 0), (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)> \geqslant 0,$$

adică

$$-\lambda_1 \geqslant 0 \text{ sau } \lambda_1 \leqslant 0.$$

Observație importantă. Dacă $(-1,0,\ldots,0) \in \mathrm{Fr}(K_D(\bar{x}))$, atunci evident $\lambda \perp (-1,0,\ldots,0)$ și, în consecință, $\lambda_1 = 0$.

Menționăm că considerațiile făcute aici sînt mai mult geometric intuitive ele, însă nu alterează cu nimic rigurozitatea demonstrației, întrucît, se folosesc de fapt consecințe elementare ale teoremei hiperplanului de separație a mulțimilor convexe (cu interioare disjuncte).

Teorema fundamentală demonstrată împreună cu corolarul poartă numele de *principiul general al separabilității.*

2.2.4. IMAGINEA GEOMETRICĂ A NOȚIUNILOR INTRODUSE LA 2.2.2. ȘI A PROPRIETĂȚII DE SEPARABILITATE DE LA 2.2.3

Este comod în acest caz să introducem noțiunea de con tangent* al unei mulțimi într-un punct al ei.

Fie, așadar, $A \subset R^n$, $x_0 \in A$ și fie mulțimea $K_T(x_0)$, definită prin $K_T(x_0) = \{\xi \in X(x_0) |$ există un șir $(x_k)_{1 \leqslant k < \infty}$ A și un șir de numere strict pozitive c_k cu $c_k \to 0$ astfel ca $\dfrac{x_k - x_0}{c_k} = \xi_k \to \xi\}$.

*) Noțiunea nu a fost folosită în demonstrația principiului separabilității, ea fiind introdusă de Hestenes.

Scanned with OKEN Scanner

$K_T(x_0)$ este un con. Într-adevăr fie $\mu > 0$; atunci

$$\frac{x_k - x_0}{\frac{c_k}{\mu}} \to \mu\xi \text{ dacă } \frac{x_k - x_0}{c_k} \to \xi.$$

Conul $K_T(x_0)$ nu este obligatoriu să fie un con convex.

Orice mulțime A care are un punct de acumulare x_0 admite în acel punct un con tangent. Într-adevăr, fie $(x_k)_{1 \leqslant k < \infty} \subset A$ cu $x_k \to x_0$ și $x_k \neq x_0$. Atunci, punînd

$$c_k = \| x_k - x_0 \|,$$

evident $c_k > 0$ și $c_k \to 0$.

Fie

$$\xi_k = \frac{x_k - x_0}{c_k},$$

unde $\| \xi_k \| = 1$. Există un subșir convergent $(\xi_{k_i})_{1 \leqslant i < \infty}$, $\xi_{k_i} \overset{i}{\to} \xi \neq 0$.

Atunci, evident,

$$\frac{x_{k_i} - x_0}{c_{k_i}} \overset{i}{\to} \xi,$$

unde se vede imediat că $\| \xi \| = 1$.

De altfel, această construcție definește mulțimea versorilor conului tangent. Prin însăși definiția lui, conul tangent este unul singur.

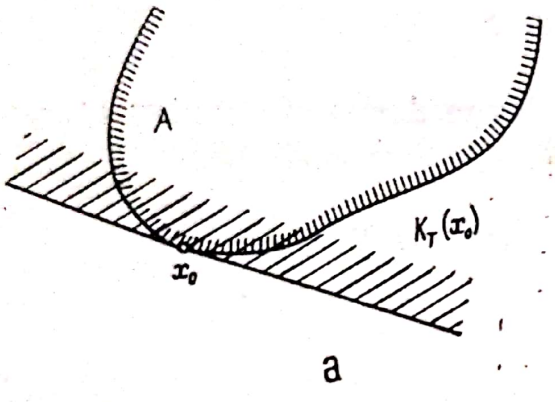
Dacă $x_0 \in \mathring{A}$, atunci, evident, $K_T(x_0) = R^n$. Vom avea de-a face cu un con diferit de R^n dacă $x_0 \in Fr(A)$ (vezi fig. 7*a* și 7*b*, în R^2, sau figura 8, în care conul tangent ilustrat în R^3 nu este convex).

Se poate enunța următoarea propoziție:

PROPOZIȚIA 1. Fie $A \subset R^n$, $x_0 \in A$. Dacă există $V_r(x_0)$ astfel încît $B = A \cap V_r(x_0)$ să fie convexă, atunci $K_T(x_0)$ este un con derivat al lui A în x_0.

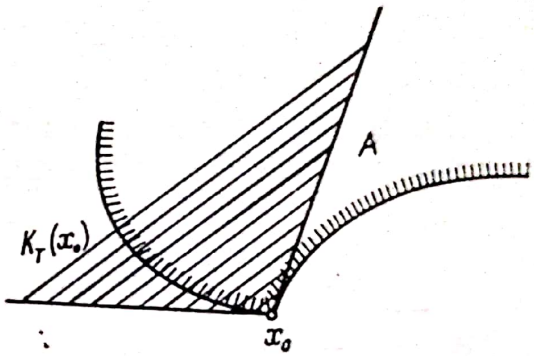
Demonstrație. $K_T(x_0)$ este un con convex. Într-adevăr. Fie $\xi_1, \xi_2 \in K_T(x_0)$ și

$$\xi_{1k} = \frac{x_{1k} - x_0}{c_{1k}} \to \xi_1, \quad \xi_{2k} = \frac{x_{2k} - x_0}{c_{2k}} \to \xi_2,$$



a

Fig. 7 *a*



b

Fig. 7 *b*

unde $(x_{1k})_{1 \leqslant k < \infty}$ și $(x_{2k})_{1 \leqslant k < \infty}$ sînt șiruri alese în B. Fie $\mu \in [0, 1]$. Atunci

$$(1 - \mu)\xi_{1k} \to (1 - \mu)\xi_1 \text{ și } \mu\xi_{2k} \to \mu\xi_2.$$

Dar

$$(1 - \mu)\xi_{1k} + \mu\xi_{2k} =$$

$$= \frac{(1 - \mu)c_{2k}(x_{1k} - x_0) + \mu c_{1k}(x_{2k} - x_0)}{c_{1k}c_{2k}}.$$

Considerînd șirurile $(c_{1k})_{1 \leqslant k < \infty}$ și $(c_{2k})_{1 \leqslant k < \infty}$ subunitare, ceea ce înseamnă a le considera numai de la un anumit k_0 încolo, rezultă, ținînd cont de convexitatea lui B, că și

$$c_{2k}(x_{1k} - x_0) \in B \text{ și } c_{1k}(x_{2k} - x_0) \in B,$$

considerați evident în $X(x_0)$, adică cu originea în x_0.

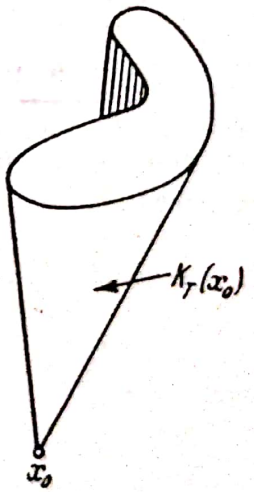


Fig. 8

În consecință, există $x_k \in B$ datorită convexității acestuia, astfel încît

$$(1 - \mu)c_{2k}(x_{1k} - x_0) + \mu c_{1k}(x_{2k} - x_0) = x_k - x_0 \text{ (în } X(x_0)).$$

Punînd $d_k = c_{1k}\, c_{2k}$, rezultă că

$$\frac{x_k - x_0}{d_k} \to (1-\mu)\xi_1 + \mu\xi_2$$

şi, în consecinţă,

$$(1-\mu)\xi_1 + \mu\xi_2 \in K_T(x_0).$$

Să arătăm acum că $K_T(x_0)$ este o mulţime derivată. Pentru aceasta să arătăm că, dacă $\xi \in K_T(x_0)$, există $\varepsilon_0 > 0$ şi $0(\varepsilon)$, astfel încît

$$x = x_0 + \varepsilon\xi + 0(\varepsilon) \in A, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

şi $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$

După cum se vede, ξ este tangenta în x_0 la curba descrisă de x cînd ε parcurge $[0, \varepsilon_0]$.

Să construim o astfel de curbă. Fie $(x_k)_{1 \leqslant k < \infty} \subset B$, $c_k > 0$ cu $c_k \to 0$, astfel ca

$$\xi_k = \frac{x_k - x_0}{c_k} \to \xi.$$

Să considerăm linia poligonală $x_1 x_2 x_3 \ldots x_k \ldots$ şi să descriem segmentul $\overline{x_{k-1}\, x_k}$ în funcţie de un parametru ε care parcurge $[c_k, c_{k-1}]$ printr-o reprezentare liniară (ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte):

$$\frac{x - x_{k-1}}{\varepsilon - c_{k-1}} = \frac{x_k - x_{k-1}}{c_k - c_{k-1}}, \qquad \varepsilon \in [c_k, c_{k-1}].$$

sau

$$x = x_{k-1} + \frac{\varepsilon - c_{k-1}}{c_k - c_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) = \frac{c_k - \varepsilon}{c_k - c_{k-1}} x_{k-1} + \frac{\varepsilon - c_{k-1}}{c_k - c_{k-1}} x_k =$$

$$= \frac{c_{k-1}(c_k - \varepsilon)}{c_k - c_{k-1}} \frac{x_{k-1} - x_0}{c_{k-1}} + \frac{c_k(\varepsilon - c_{k-1})}{c_k - c_{k-1}} \frac{x_k - x_0}{c_k} +$$

$$+\frac{x_0}{c_k-c_{k-1}}(c_k-\varepsilon+\varepsilon-c_{k-1})=x_0+\frac{c_{k-1}(c_k-\varepsilon)}{c_k-c_{k-1}}\xi_{k-1}+$$

$$+\frac{c_k(\varepsilon-c_{k-1})}{c_k-c_{k-1}}\xi_k=x_0+\frac{c_{k-1}(c_k-\varepsilon)}{c_k-c_{k-1}}(\xi_{k-1}-\xi)+$$

$$+\frac{c_k(\varepsilon-c_{k-1})}{c_k-c_{k-1}}(\xi_k-\xi)+\left(\frac{c_{k-1}(c_k-\varepsilon)}{c_k-c_{k-1}}+\frac{c_k(\varepsilon-c_{k-1})}{c_k-c_{k-1}}\right)\xi=$$

$$=x_0+\varepsilon\xi+\frac{c_{k-1}(c_k-\varepsilon)}{c_k-c_{k-1}}(\xi_{k-1}-\xi)+\frac{c_k(\varepsilon-c_{k-1})}{c_k-c_{k-1}}(\xi_k-\xi).$$

În acest fel, cînd ε variază continuu parcurgînd valorile : $c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$, x parcurge conturul poligonul $x_1x_2x_3\ldots x_k\ldots$, care, datorită convexităţii lui B, este conţinut în întregime în acesta.

Punînd

$$0(\varepsilon)=\frac{c_{k-1}(c_k-\varepsilon)}{c_k-c_{k-1}}(\xi_{k-1}-\xi)+\frac{c_k(\varepsilon-c_{k-1})}{c_k-c_{k-1}}(\xi_k-\xi),$$

să arătăm că

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}=0.$$

Fie

$$\psi_{k-1}(\varepsilon)=\frac{c_{k-1}(c_k-\varepsilon)}{\varepsilon(c_k-c_{k-1})}\text{ şi }\psi_k(\varepsilon)=\frac{c_k(\varepsilon-c_{k-1})}{\varepsilon(c_k-c_{k-1})}.$$

Atunci

$$\frac{d\psi_{k-1}}{d\varepsilon}=-\frac{c_{k-1}c_k}{\varepsilon^2(c_k-c_{k-1})}\text{ şi }\frac{d\psi_k}{d\varepsilon}=\frac{c_{k-1}c_k}{\varepsilon^2(c_k-c_{k-1})}.$$

Rezultă deci că ψ_{k-1}, ψ_k sînt monotone, avînd în $[c_{k-1}, c_k]$ valoarea maximă egală cu cea unitară.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$\frac{\| 0(\varepsilon) \|}{\varepsilon} \leqslant \| \xi_{k-1} - \xi \| + \| \xi_k - \xi \| \to 0 \quad \text{c.c.t.d.}$$

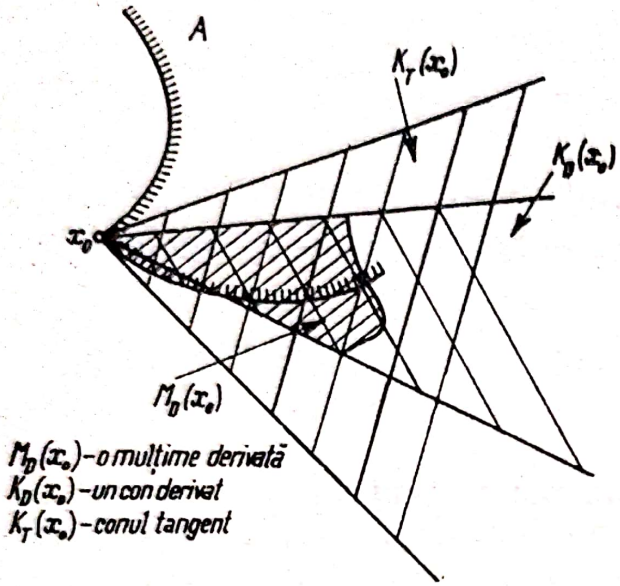


Fig. 9

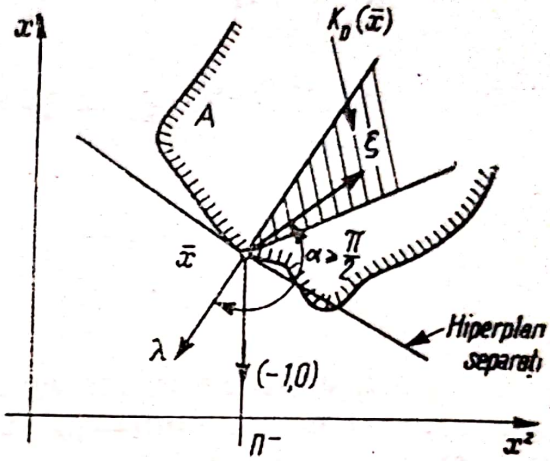


Fig. 10

În felul acesta, prin imaginea geometrică a conului tangent avem în acelaşi timp şi pe aceea a unui con derivat. Mai mult, orice con convex inclus în conul tangent, conurile avînd aceleaşi vîrfuri, este un con derivat.

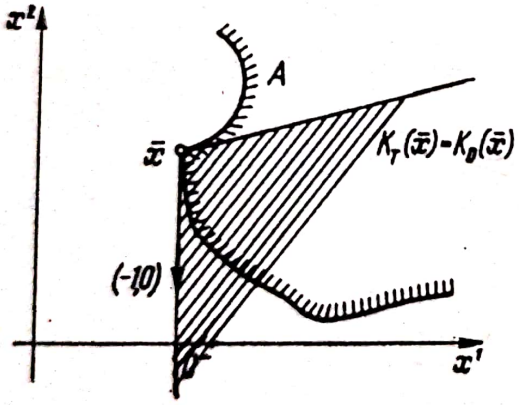


Fig. 11

După cum s-a văzut, existenţa unui con derivat este legată de *existenţa proprietăţii de convexitate locală*.

În fine, orice mulţime inclusă într-un con derivat şi care conţine vîrful acestuia este o mulţime derivată, după cum uşor se poate verifica şi după cum uşor se vede din figura 9.

Fie acum $\bar{x} \in A$ un punct extrem în raport cu prima coordonată, iar $K_D(\bar{x})$ un con derivat a lui A în $\bar{x}$. Proprietatea de separabilitate rezultă intuitiv geometric din figura 10.

Să ilustrăm acum, în fine, cazul cînd $(-1,0)$ este în $F_r(K_D(\bar{x}))$ (fig. 11).

2.2.5. EXTENSIUNI ALE TEOREMEI DE SEPARABILITATE

Fie

1. A o mulțime oarecare din R^n;
2. x^i_* cu $2 \leqslant i \leqslant k+1$, $\bar{x}^j$ cu $k+2 \leqslant j \leqslant n$, $n-1$ numere reale;
3. $\bar{x} \in A$.

Vom spune că $\bar{x}$ este extrem în raport cu prima coordonată și k — liber la dreapta dacă

$$\bar{x}^1 = \inf \{x^1 \mid (x^1, x^2, \ldots, x^{k+1}, \bar{x}^{k+2}, \ldots \bar{x}^n) \in A,$$

$$x^i \geqslant x^i_*, 2 \leqslant i \leqslant k+1\}$$

și $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$.

Se introduce în $X(\bar{x})$:

$$D_k^- = \{\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{k+1}, 0, \ldots, 0) \mid \xi^1 < 0, \xi^i \geqslant 0 \ (2 \leqslant i \leqslant k+1),$$

cu precizarea că $\xi^i \in R^1 \leftrightarrow \bar{x}^i > x^i_*\}$,
care evident este un con convex. Este atunci valabilă următoarea teoremă.

Teorema extinsă de separabilitate nr. 1. Fie $\bar{x} \in A$ un punct extrem în raport cu prima coordonată și k—liber la dreapta, iar $M_D(\bar{x})$ o mulțime derivată a lui A relativ la $\bar{x}$. Atunci orice semidreaptă D din D_k^- cu extremitatea în $\bar{x}$ nu este conținută în interiorul lui $K_D(\bar{x})$.

Demonstrație. Presupunem contrarul. Fie analog cu demonstrația teoremei 1 de la 2.2.3.:

$$\xi^* = (\xi^{1*}, \xi^{2*}, \ldots, \xi^{k+1*} 0, \ldots, 0),$$

plasat pe semidreapta $D \subset \overset{\circ}{K}_D(\bar{x})$. Evident,

$$\xi^{1*} < 0, \ \xi^{i*} \geqslant 0 \leftrightarrow \bar{x}^i = x^i_* \text{ și } \xi^{*i} \in R^1 \leftrightarrow \bar{x}^i > x^i_*, \ 2 \leqslant i \leqslant k+1.$$

Se urmează întocmai raționamentul din teorema 1 de la 2.2.3., raționament necondiționat de coordonatele lui ξ^*.

Scanned with OKEN Scanner

Va rezulta în final

$$\frac{x(\delta\theta(\varepsilon_0^*),\ \varepsilon_0^*) - \bar{x}}{\varepsilon_0^*} - \xi^* = 0,$$

cu $\varepsilon_0^* \in (0,\ \varepsilon_0]$ cu $\sigma(\varepsilon_0^*) \leqslant 1$. În plus, în acest caz vom mai modifica ε_0^*, micşorîndu-l în sensul ca încă să fie valabile inegalităţile

$$\bar{x}^i + \varepsilon_0^* \xi^{i*} > x_*^i \leftrightarrow \bar{x}^i > x_*^i,\ 2 \leqslant i \leqslant k+1,$$

lucru evident posibil.
Atunci, scriind pe componente, va rezulta

1) $x^1(\delta\theta(\varepsilon_0^*),\ \varepsilon_0^*) = x^1 + \varepsilon_0^* \xi^{1*} < x^1$, căci $\xi^1 < 0$;

2) $x^i(\delta\theta(\varepsilon_0^*),\ \varepsilon_0^*) = \bar{x}^i + \varepsilon_0^* \xi^{i*} \geqslant \bar{x}^i,\ 2 \leqslant i \leqslant k+1,$

deoarece

a) $\bar{x}^i = x_*^i \to \xi^{i*} \geqslant 0,$

b) $\bar{x}^i > x_*^i,$

datorită alegerii corespunzătoare a lui ε_0^*, şi, în fine,

3) $x^j(\delta\theta(\varepsilon_0^*),\ \varepsilon_0^*) = \bar{x}^j,\ k+2 \leqslant j \leqslant n,$

ceea ce înseamnă că $\bar{x}$ nu este un punct extrem în raport cu prima coordonată şi k — liber la dreapta.

Corolar. Deoarece rezultă imediat că $K_D(\bar{x})$ şi D_k^- sînt separabile, există un hiperplan care le separă, cu normala $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$ astfel orientată, încît

$$<\lambda, \xi> \leqslant 0,\ \xi \in K_D(\bar{x})$$

şi

$$<\lambda, \xi> \geqslant 0,\ \xi \in D_k^-.$$

Rezultă atunci :

TEOREMA 2. *În condițiile teoremei de extensiune nr. 1 și ale corolarului, avem*

1) $\lambda_1 \leqslant 0$;

2) $\lambda_i \geqslant 0$, $2 \leqslant i \leqslant k+1$,

cu precizarea că

$$\lambda_i = 0 \leftrightarrow \bar{x}^i \to x^i_*.$$

Demonstrație.

1) Fie

$$\xi_{(1)} = (-1, 0, \ldots, 0) \in D_k^-,$$

$$< \lambda, \xi_{(1)} > = -\lambda_1 \geqslant 0,$$

adică $\lambda_1 \leqslant 0$.

2) Fie

$$\xi_{(i)} = (-\varepsilon^2, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0),$$

de unde

$$< \lambda, \xi_{(i)} > = -\lambda_1 \varepsilon^2 + \lambda_i \geqslant 0$$

sau $\lambda_i \geqslant \lambda_1 \varepsilon^2$ pentru orice $\varepsilon^2 > 0$,
deci $\lambda_i \geqslant 0$.
Dacă pentru un i, $2 \leqslant i \leqslant k+1$, $\bar{x}^i > x^i_*$, atunci și

$$\xi^1_{(i)} = (-\varepsilon^2, \ldots, \overset{(i)}{-1}, \ldots, 0) \in D_k^-,$$

implicînd în mod analog

$$\lambda_i \leqslant 0$$

sau, în definitiv,

$$\lambda_i = 0 \leftrightarrow \bar{x}^i \geq x^i_*, \quad 2 \leqslant i \leqslant k+1.$$

Astfel teorema este complet demonstrată.

Fie acum o varietate netedă $S \subset R^{n-1}$, s — dimensională, adică

$$S = \{(x^2, \ldots, x^n) \mid g^i(x^2, \ldots, x^n) = 0,\ i = 1, \ldots n-s-1\},$$

g^i fiind funcţii cu gradient continuu care nu se anulează pentru nici un punct $(x^2, \ldots, x^n) \in S$, iar ∇g^i fiind liniar independenţi pentru orice punct a lui S.

Fie de asemenea $A \subset R^n$ astfel încît există puncte $x = (x^1, \ldots, x^n)$ aparţinînd lui A astfel ca $(x^2, \ldots, x^n) \in S$.

Vom spune că $\bar{x} \in A$ este un punct extrem în raport cu prima coordonată referitor la varietatea S dacă

$$\bar{x}^1 = \inf \{x^1 \mid (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in A \text{ şi } (x^2, \ldots, x^n) \in S\}.$$

Să considerăm un asemenea punct $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$, unde, evident, $(\bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) \in S^*)$ şi T planul tangent la S în punctul $(\bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ al acestei suprafeţe.

Introducem următoarele mulţimi:

1) $\hat{S} = \{(\bar{x}^1, x^2, \ldots, x^n) \mid (x^2, \ldots, x^n) \in S\}$;

2) $\hat{T} = \{(\bar{x}^1, x^2, \ldots, x^n) \mid (x^2, \ldots, x^n) \in T\}$;

3) $Q = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \mid x^1 \leqslant \bar{x}^1, (x^2, \ldots, x^n) \in S\}$;

4) $P = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \mid x^1 \leqslant \bar{x}^1, (x^2, \ldots, x^n) \in T\}$.

Reprezentarea geometrică a noţiunilor introduse mai sus este redată în figura 12.

Cu noţiunile preliminare introduse mai sus se poate enunţa o a doua extensiune a teoremei de separabilitate.

Teorema extinsă de separabilitate nr. 2. Dacă $\bar{x} \in A$ este un punct extrem în raport cu prima coordonată referitor la varietatea netedă s — dimensională $S \subset R^{n-1}$ şi dacă există o mulţime derivată $M_D(\bar{x})$ a lui A, atunci conul $P \setminus \hat{T}$ (semiplanul mărginit superior de-alungul axei x^1 de către $\hat{T}$) nu are puncte comune cu $\overset{\circ}{K}_D(\bar{x})$.

---

*) S este, evident, o mulţime închisă.

Demonstrație. Presupunem contrarul, adică există $x_0 \in \mathring{K}_D(\bar{x}) \cap \cap (P \setminus \hat{T})$. Considerăm semidreapta D cu extremitatea în $\bar{x}$ și trecînd prin x_0. Evident, $D \subset P$ și $D \subset \mathring{K}_D(\bar{x})$. Semidreapta D este tangentă la varietatea Q în x, fiind conținută în varietatea tangentă P.

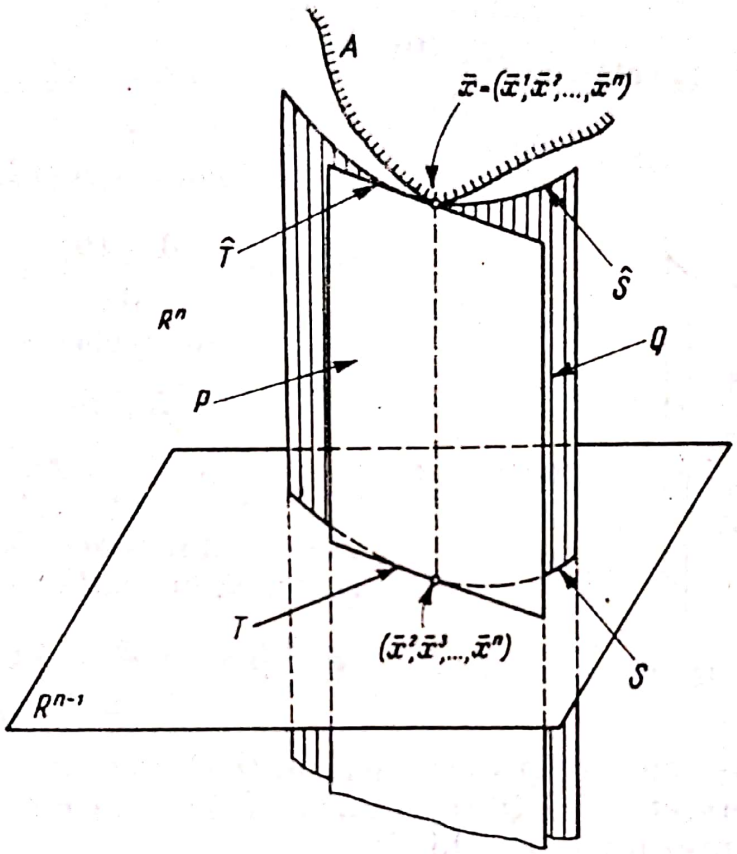


Fig. 12

Fie homeomorfismul h local punctului $\bar{x}$ definit prin proiecția ortogonală a lui Q pe P. Atunci prin h^{-1} o porțiune a semidreptei D din vecinătatea lui $\bar{x}$ se va transforma într-o curbă Γ pe suprafața netedă Q. Dacă ξ_0 este corespondentul în $X(\bar{x})$ a lui x_0, atunci pentru un interval de variație mic $[0, \varepsilon_0']$ curba Γ va fi descrisă de $h^{-1}(\varepsilon \xi_0)$ cu $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0']$, definind

$$\xi_\Gamma(\varepsilon) = h^{-1}(\varepsilon \xi_0) \text{ pe } [0, \varepsilon_0'],$$

ca în figura 13.

Se poate arăta uşor, deoarece Q este o varietate netedă, că Γ este continuă şi derivabilă în raport cu parametrul ε şi deci :

$$\xi_\Gamma(\varepsilon) = \xi_\Gamma(0) + \varepsilon \frac{d\xi_\Gamma(0)}{d\varepsilon} + 0(\varepsilon) \text{ pe } [0, \varepsilon_0']$$

sau

$$\xi_\Gamma(\varepsilon) = \varepsilon \frac{d\xi_\Gamma(0)}{d\varepsilon} + 0(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0'],$$

cu $0(\varepsilon)$ continuă şi $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$.

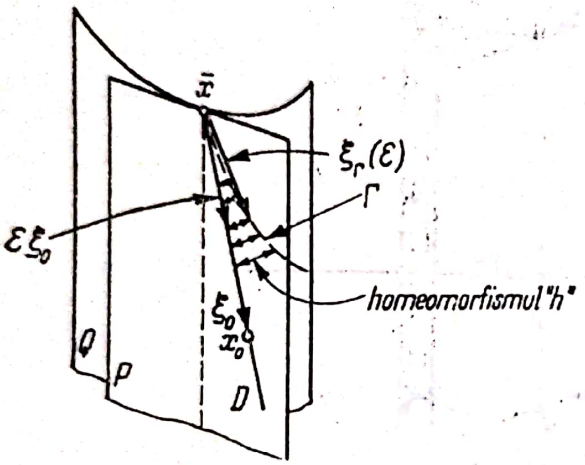


Fig. 13

Evident, $\frac{d\xi_\Gamma(0)}{d\varepsilon} = \xi^* \neq 0$, ξ^* coliniar şi de acelaşi sens cu ξ_0, $\xi^* \in \mathring{K}_D(\bar{x})$ definind pe semidreapta D punctul $x^* \in \mathring{K}_D(\bar{x})$.

Se repetă întocmai raţionamentul din teorema 1 de la 2.2.3, astfel că în final se va obţine

$$x(\delta\theta, \varepsilon) = \bar{x} + \varepsilon\tilde{\xi}(\delta\theta) + 0(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0''],$$

care descrie, aşa cum se ştie, compactul $Q(\varepsilon)$ cînd $\delta\theta \in \bar{V}_1(0)$. Se pune problema intersecţiei lui $Q(\varepsilon)$ cu curba Γ într-un punct diferit de $\bar{x}$, adică a existenţei unei perechi

$$(\delta\theta^*, \varepsilon^*) \in \bar{V}_1(0) \times (0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon_0 = inf\ \{\varepsilon_0', \varepsilon_0''\}$$

care să anuleze funcţia

$$q(\delta\theta, \varepsilon) = x(\delta\theta, \varepsilon) - \bar{x} - \xi_\Gamma(\varepsilon).$$

Dezvoltînd obţinem

$$q(\delta\theta, \varepsilon) = \varepsilon\tilde{\xi}(\delta\theta) + 0(\varepsilon) - \varepsilon\xi^* - 0(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\xi^* + \varepsilon\Xi\,\delta\theta + 0(\varepsilon) - \varepsilon\xi^* - 0(\varepsilon) = \varepsilon\Xi\,\delta\theta + 0(\varepsilon)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\frac{q(\delta\theta, \varepsilon)}{\varepsilon} = \Xi\delta\theta + \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{x(\delta\theta, \varepsilon) - \bar{x}}{\varepsilon} - \frac{\xi_\Gamma(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Continuînd raţionamentele în mod analog ca în teorema amintită, se obţine în definitiv că există $(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) \in \bar{V}_1(0) \times (0, \varepsilon_0]$ ca

$$\frac{x(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) - \bar{x}}{\varepsilon_0^*} - \frac{\xi_\Gamma(\varepsilon_0^*)}{\varepsilon_0^*} = 0$$

sau

$$x(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) = \bar{x} + \xi_\Gamma(\varepsilon_0^*) \in \Gamma \subset Q.$$

Deci imediat rezultă din ultima relaţie de incluziune că

$$(x^2(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*), \ldots, x^n(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*)) \in S.$$

De asemenea

$$x^1(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) = \bar{x}^1 + \xi_\Gamma^1(\varepsilon_0^*),$$

unde

$$\xi_\Gamma^1(\varepsilon_0^*) < 0.$$

Aceasta din urmă rezultă din faptul că, deoarece $x_0 \in P \setminus \hat{T}$, $\varepsilon\xi_0^1 < 0$ pentru $\varepsilon > 0$. Homeomorfismul h, fiind definit, de proiecţia ortogonală a lui Q pe P, conservă prima coordonată x^1, întrucît Q şi P sînt în R^n „în poziţie verticală".

Aşadar, în defnitiv

$$x^1(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*) < \bar{x}^1$$

şi

$$(x^2(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*), \ldots, x^n(\delta\theta(\varepsilon_0^*), \varepsilon_0^*)) \in S,$$

ceea ce contrazice faptul că $\bar{x}$ este extrem referitor la S.

Scanned with OKEN Scanner

Corolarul nr. 1. Există un hiperplan de separaţie de normală λ astfel orientată ca

$$<\lambda, \xi> \leqslant 0, \quad \xi \in K_D(\bar{x}),$$

$$<\lambda, \xi> \geqslant 0, \quad \xi \in P.$$

Corolarul nr. 2. Hiperplanul de separaţie conţine varietatea $\hat{T}$ ca fiind o varietate afină de dimensiune mai mică decît cea a hiperplanului de separaţie şi fiind conţinută în subspaţiul afectat de P. Aşadar,

$$<\lambda, \xi> = 0, \quad \xi \in \hat{T}.$$

Rezultă

TEOREMA 3. *Pentru orice vector* $p \in T$, $p = (p^2, \ldots, p^n)$ avem

$$<(\lambda_2, \ldots, \lambda_n), (p^2, \ldots, p^n)> = 0.$$

Demonstraţie. Evident, căci vectorii $p \in T$ şi $\xi \in \hat{T}$ sînt paraleli şi deci $\xi^1 = 0$.

Relaţia definită de produsul scalar de mai sus, scrisă dezvoltat

$$\lambda_2 p^2 + \ldots + \lambda_n p^n = 0,$$

poartă numele de condiţia de transversalitate introdusă de $\bar{x}$ referitor la varietatea S.

2.3. PRINCIPIUL MAXIMULUI PENTRU EXTREME FIXE

2.3.1. FORMULAREA PROBLEMEI

Fie

1. $X \subset R^n$ o parte conexă a lui R^n, impunînd totodată o limitare în spaţiul R^n.
2. $U \subset R^r$, unde în unele cazuri, dacă incluziunea este strictă, U este un compact.
3. $x_0, x_1 \in X$ două puncte arbitrare.
4. $I = [t_0, t_1]$ un interval de timp oarecare.

Scanned with OKEN Scanner

5. $D \subset R^n$ un domeniu care conține pe X, $D \supset X$.

6. $f : I \times D \times U \to R^n$ de forma $f(f^1, \ldots, f^n)$, o aplicație cu proprietățile

$$f \in C^0(I \times D \times U),\ f \in C^1(I \times D),$$

adică continuă în variabile t, x, u cu referire la domeniul de definiție și cu derivate parțiale în raport cu t și $x^1, \ldots, x^n$ continue în variabilele t, x, u.

7. $f^0 : I \times D \times U \to R^1$, de același tip cu funcțiile $f^1, \ldots, f^n$.

Vom defini atunci :

1. Un obiect condus, a cărui proces de conducere este descris de ecuația diferențială vectorială

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,\ x,\ u),$$

unde u sînt funcții continue pe porțiuni.

2. $\Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0, t_1) = \{u : I \to U \mid$, continue pe porțiuni, conduc obiectul din $x(t_0) = x_0$ în $x(t_1) = x_1$, traiectoria $x(t)$ fiind conținută în întregime în $X\}$ clasa comenzilor numite *strict admisibile*.

3. $J : \Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0, t_1) \to R^1$ o funcțională definită de

$$J(u) = \int_I f^0\ (t,\ x(t),\ u(t))\ \mathrm{d}t,$$

unde $x(t)$ este traiectoria corespunzătoare comenzii $u(t)$.

Problema conducerii optimale în acest caz se va enunța astfel. Să se găsească o comandă $\overline{u} \in \Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0, t_1)$ astfel încît

$$J(\overline{u}) = \inf \{J(u) \mid u \in \Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0, t_1)\},$$

adică J să-și atingă cea mai mică valoare.

2.3.2. REPREZENTAREA GEOMETRICĂ A OPTIMALITĂȚII

Fie introdusă variabila x^0 prin

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t} = f^0(t,\ x,\ u),\ x^0\ (t_0) = 0$$

și, în consecință, următoarele extensiuni :

1) $\hat{X} = R^1 \times X$, unde $\hat{x} \in \hat{X}$ este de forma $\hat{x} = (x^0, x^1, \ldots x^n)$;

2) $\hat{f} = (f^0, f)$;

3) $\dfrac{d\hat{x}}{dt} = \hat{f}(t, x, u)$.

Avînd în vedere că

$$x^0(t_1) = x^0(t_0) + \int_I f^0(t, x(t), u(t))\, dt = J(u),$$

unde

$u \in \sum(X, U, x_0, x_1, t_0, t_1)$, rezultă că pentru orice comandă strict admisibilă traiectoria $\hat{x}(t)$ va pleca din $(0, x_0)$ la t_0 și va ajunge în $(J(u), x_1)$ la t_1, adică pe dreapta Δ ortogonală spațiului X în x_1 (fig. 14).

Adică, pentru orice comandă strict admisibilă, traiectoria $\hat{x}(t)$ va ajunge pe dreapta Δ.

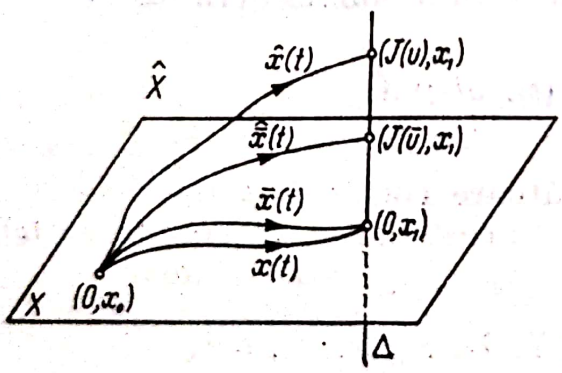


Fig. 14

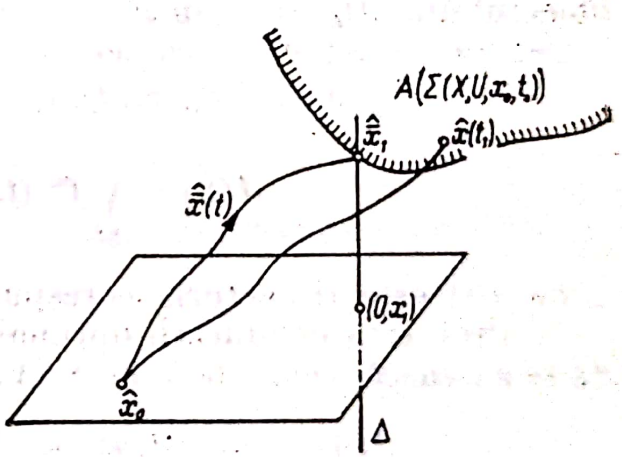


Fig. 15

În consecință, traiectoria optimală $\bar{\hat{x}}(t) = (\bar{x}^0(t), \bar{x}(t))$ va ajunge pe dreapta Δ la cea mai mică altitudine" față de X ca în figura 14.

Fie acum

$\sum(X, U, x_0, t_0) = \{u : I \to U \mid u$, continue pe porțiuni, conduc obiectul din $x(t_0) = x_0$ timp de $t_1 - t_0$, traiecoria $x(t)$ fiind situată în întregime în $X\}$ clasa comenzilor numite *admisibile*.

Evident, $\Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0, t_1) \subset \Sigma(X, U, x_0, t_0)$.
Fie acum

$$\hat{A}(\Sigma(X, U, x_0, t_0)) = \left\{\hat{x}(t_1) \,\middle|\, \frac{d\hat{x}}{dt} = f(t, \hat{x}, u),\ x(t_0) = x_0,\right.$$

$$\left. u \in \Sigma(X, U, x_0, t_0)\right\},$$

mulțimea punctelor finale ale traiectoriilor cauzate de clasa comenzilor admisibile. Evident, punctele $\hat{x}(t_1)$ provenind din comenzile strict admisibile se vor găsi pe dreapta Δ. Se constată imediat că $\hat{\hat{x}}(t_1) = \hat{\hat{x}}_1$ este un punct extrem în raport cu prima coordonată x^0 a mulțimii $\hat{A}(\Sigma(X, U, x_0, t_0))$ (fig. 15).

2.3.3. TRANSPORTUL DE-A LUNGUL UNEI TRAIECTORII

Fie o deplasare a punctului $\hat{x}_0$ în $\hat{x}_0^*$, definită de

$$\hat{x}_0^* = \hat{x}_0 + \varepsilon\hat{\xi}_0 + 0(\varepsilon),$$

unde

$$\hat{\xi}_0 \in \hat{X}(\hat{x}_0),\ \varepsilon > 0.$$

Fie de asemenea $u \in \Sigma(X, U, x_0, t_0)$. În aceste condiții, traiectoria $\hat{x}(t)$ care pleacă din $\hat{x}_0$ se modifică, devenind $\hat{x}^*(t)$, de forma

$$\hat{x}^*(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon\hat{\xi}(t) + 0(\varepsilon),$$

unde

$$\hat{\xi}(t) \in \hat{X}(\hat{x}(t)).$$

Scanned with OKEN Scanner

După cum se poate calcula imediat $\hat{\xi}(t)$ este descris de sistemul în variaţii

$$\frac{d\hat{\xi}}{dt} = \hat{D}(t)\hat{\xi} \text{ cu } \hat{\xi}(t_0) = \hat{\xi}_0,$$

unde

$$\hat{D}(t) = \partial_{\hat{x}} \hat{f} \Big|_{(t, x(t), u(t))} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f^0}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^0}{\partial x^n} \\ 0 & \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \quad \text{de calculat în } (t, x(t), u(t)).$$

Fie $\hat{\Xi}(t, \tau)$*) matricea fundamentală a sistemului în variaţii. Atunci

$$\hat{\xi}(t) = \hat{\Xi}(t, t_0)\, \hat{\xi}_0$$

şi deci

$$\hat{x}^*(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon \hat{\Xi}(t_1, t_0)\hat{\xi}_0 + 0(\varepsilon).$$

Variaţia efectuată în $\hat{x}_0$ se transportă în $\hat{x}(t_1)$ în forma

$$\hat{x}^*(t_1) = \hat{x}(t_1) + \varepsilon\, \hat{\Xi}(t_1, t_0)\, \hat{\xi}_0 + 0(\varepsilon).$$

În general, atunci orice modificare a traiectoriei la un moment dat t fără modificarea comenzii, de forma

$$\hat{x}^*(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon\xi(t) + 0(\varepsilon),$$

---

*) $\hat{\Xi}(t, t) = E$, $\hat{\Xi}^{-1}(t, \tau) = \hat{\Xi}(\tau, t)$

se transportă în $\hat{x}(t_1)$ în forma

$$\hat{x}^*(t_1) = \hat{x}(t_1) + \varepsilon \hat{\Xi}(t_1, t)\ \hat{\xi}(t) + 0(\varepsilon),$$

transformarea liniară nedegenerată $\hat{\Xi}(t_1, t)$ efectuînd o transformare liniară a spațiului $\hat{X}(\hat{x}(t))$ în $\hat{X}(\hat{x}(t_1))$:

$$\hat{\xi}(t_1) = \hat{\Xi}(t_1, t)\ \hat{\xi}(t).$$

Fie acum sistemul

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = -\hat{D}^T(t)\ \hat{\psi},$$

unde

$$\hat{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n) \in R^{n+1}$$

sau

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = -\partial^T_{\hat{x}} \hat{f}\Big|_{(t, x(t), u(t))} \cdot \hat{\psi}$$

sau încă, pe componente

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f^k(t, x(t)\, u(t))}{\partial x^i} \psi_k,\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Un astfel de sistem poartă numele de *sistem asociat* traectoriei $\hat{x}(t)$.

Fie $\hat{\Psi}(t, \tau)$ matricea fundamentală a acestui sistem. Așa cum este cunoscut,

$$\hat{\Psi}^T(t, \tau) = \hat{\Xi}^{-1}(t, \tau).$$

Într-adevăr,

$$\frac{d}{dt}\hat{\Psi}^T(t, \tau)\,\hat{\Xi}(t, \tau) = -\hat{\Psi}^T(t, \tau)\,\hat{D}(t)\,\hat{\Xi}(t, \tau) +$$

$$+\hat{\Psi}^T(t, \tau)\ D(t)\,\hat{\Xi}(t, \tau) = 0.$$

Deci

$$\hat{\Psi}^T(t,\tau)\,\hat{\Xi}(t,\tau) = [ct],$$

dar

$$\hat{\Psi}^T(\tau,\tau)\,\hat{\Xi}(\tau,\tau) = E\cdot E = E$$

şi, în consecinţă,

$$\hat{\Psi}^T(t,\tau)\,\hat{\Xi}(t,\tau) = E,$$

datorită continuităţii.

Atunci transportul de-a lungul unei traiectorii $\hat{x}(t)$ din $\hat{X}(\hat{x}(t))$ în $\hat{X}(\hat{x}(t_1))$, cu comandă nevariată este descris de

$$\hat{\xi}(t_1) = \hat{\Xi}(t_1, t)\,\hat{\xi}(t) = \hat{\Xi}^{-1}(t, t_1)\,\hat{\xi}(t) = \hat{\Psi}^T(t, t_1)\,\hat{\xi}(t)$$

sau, în definitiv,

$$\hat{\xi}(t_1) = \hat{\Psi}^T(t, t_1)\,\hat{\xi}(t),$$

unde $\hat{\Psi}(t, \tau)$ este matricea fundamentală a sistemului asociat.

2.3.4. „TRANSPORTUL" PROBLEMEI DE OPTIMALITATE ÎN PUNCTUL FINAL

Folosind operatorul de transport, vom putea modifica problema de optimalitate. Fie astfel

$$\hat{F} : I \times D \times U \to R^{n+1}$$

prin

$$\hat{F}(t, x, u) = \hat{\Psi}^T(t, t_1)\hat{f}(t, x, u) + \frac{d\hat{\Psi}^T(t, t_1)}{dt}\hat{x},$$

$\Psi(t, \tau)$ corespunzînd unei traiectorii date arbitrar, sub acţiunea unei comenzi admisibile şi în raport cu care se efectuează toate operaţiile de transport. Traiectoria se va numi *traiectorie de transport.*

Scanned with OKEN Scanner

Primul termen al egalității de mai sus reprezintă de fapt operația de transport, iar cel de-al doilea avînd un efect de uniformizare, care se vede imediat din următoarele două proprietăți enunțate prin

1) $\hat{F}(t, x(t), u(t)) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\Psi}^T(t, t_1)\,\hat{x}(t))$, pentru orice traiectorie;

2) $\partial_{\hat{x}} \hat{F}(t, x(t), u(t))\Big| = 0$ de-a lungul traiectoriei de transport.

Într-adevăr, pentru prima proprietate

$$\hat{F}(t, x(t), u(t)) = \hat{\Psi}^T(t, t_1)\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\hat{\Psi}^T(t, t_1)}{\mathrm{d}t}\hat{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\Psi}^T(t, t_1)\,\hat{x}(t)),$$

iar pentru cea de-a doua proprietate

$$\partial_{\hat{x}} \hat{F}(t, x, u) = \hat{\Psi}^T(t, t_1)\,\partial_{\hat{x}} \hat{f}(t, x, u) - \hat{\Psi}^T(t, t_1)\,\hat{D}(t),$$

deci pe traiectoria de transport

$$\partial_{\hat{x}} \hat{F}(t, x(t), u(t)) = \hat{\Psi}^T(t, t_1)\,\hat{D}(t) - \hat{\Psi}^T(t, t_1)\,\hat{D}(t) = 0,$$

deoarece numai pe traiectoria de transport $\partial_{\hat{x}} \hat{f}(t, x, u) = \hat{D}(t)$.

Să calculăm acum $\int_I \hat{F}(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t$, de-a lungul unei traiectorii oarecare:

$$\int_I \hat{F}(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{d}{dt}\hat{\Psi}^T(t, t_1)\,\hat{x}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \hat{\Psi}^T(t_1, t_1)\,\hat{x}(t_1) - \hat{\Psi}^T(t_0, t_1)\,\hat{x}_0 = \hat{x}(t_1) - \hat{\Xi}(t_1, t_0)\,x_0.$$

Rezultă imediat că

$\int_I F^0(t, x(t)\ u(t))\,\mathrm{d}t = x^0(t_1) = J(u)$, $u \in \Sigma(X, U, x_0, t_0)$, deoarece $x_0^0 = 0$.

Atunci

$$\hat{A}\,\Sigma(X, U\,x_0, t_0) = \Big\{ \Xi(t_1, t_0)\,\hat{x}_0 + \int_I \hat{F}(t, x(t), u(t))\,dt \mid u \in \Sigma(X, U, x_0, t_0) \Big\},$$

unde reamintim ca fiind importantă proprietatea

$$\partial \hat{x}\,\hat{F}(t, x(t), u(t)) = 0$$

pe traiectoria de transport.

Fie, acum, introdusă pentru traiectoria de transport $\hat{x}(t)$ cauzată de comanda admisibilă u, mulţimea următoare considerată în spaţiul $\hat{X}(\hat{x}(t_1))$:

$\hat{M}(\hat{x}(t_1)) = \{\hat{F}(t, x(t), v) - \hat{F}(t, x(t), u(t)) \mid t \in (t_0, t_1)$ punct de continuitate a lui u; $v \in U\}$.

Considerînd valabilă o proprietate π, pe care o vom enunţa în cele ce urmează şi care nu este necesară dacă $X = R^n$, este adevărată următoarea propoziţie :

PROPOZIŢIA 1. $\hat{M}(\hat{x}(t_1))$ este o mulţime derivată a lui $\hat{A}(\Sigma(X, U, x_0, t_0))$ relativ la punctul $\hat{x}(t_1)$.

Demonstraţie. Fie

1) $\tau_1, \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k \leqslant \ldots \leqslant \tau_q$, q puncte de continuitate ale lui u în (t_0, t_1);

2) $\delta\tau^1, \delta\tau^2, \ldots, \delta\tau^k, \ldots, \delta\tau^q \geqslant 0$;

3) $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots v_q \in U$;

4) $\varepsilon > 0$, suficient de mic, astfel încît

a) pentru orice $1 \leqslant k \leqslant q$ pentru care $\tau_k < \tau_{k+1}$:

$\tau_k + \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^k) < \tau_{k+1}$;

b) $\tau_q + \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^q) < t_1$;

c) pentru orice $1 \leqslant k \leqslant q$ intervalele

$$[\tau_k,\ \tau_k + \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^k)]$$

sînt intervale de continuitate ale comenzii u;

5) intervalele I_i, $i = 1, \ldots, q$, definite prin

$$I_i = [\tau_i + \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^{i-1}),\ \tau_i + \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^i))$$

unde $\delta\tau^0 = 0$, disjuncte chiar dacă unele puncte τ_i sînt confundate după cum uşor se poate vedea;

6) u_i, $i = 1, \ldots q$, q funcţii continue definite respectiv pe $[\tau_i,\ \tau_i + \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^i)]$, cu valori în U astfel încît $u_i(\tau_i) = v_i$.

Fie acum

$$u^* : I \to U$$

prin:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_i(t),\ t \in I_i, \\ u(t),\ t \quad I \setminus \bigcup_{i=1}^{q} I_i = I^*; \end{cases}$$

se vede că funcţia u^* continuă pe porţiuni diferă de u pe o mulţime de măsură $\varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^q)$.

Proprietatea π se enunţă astfel: *pentru* $\varepsilon > 0$ *suficient de mic se pot alege funcţiile* u_i, $i = 1, \ldots q$, *astfel încît* u^* *să fie o comandă admisibilă.* O astfel de comandă se va numi *variată* în raport cu u.

Evident, această proprietate nu este necesară dacă $X = R^n$, funcţiile u_i alegîndu-se în acest caz constante şi egale cu v_i.

Fie $\hat{x}^*(t)$ traiectoria cauzată de comanda $u^* \in \Sigma(X, U, x_0, t_0)$. Atunci

$$\hat{x}^*(t_1) = \hat{\Xi}(t_1, t_0)\,\hat{x}_0 + \int_I \hat{F}(t, x^*(t), u^*(t))\ dt \in \hat{A}(\Sigma(X, U, x_0, t_0))$$

sau

$$\hat{x}^*(t_1) = \hat{\Xi}(t_1, t_0)\,\hat{x}_0 + \int_I \hat{F}(t, x(t), u(t))\,dt +$$

$$+ \int_I (\hat{F}(t, x^*(t), u^*(t)) - \hat{F}(t, x(t), u(t)))\,dt =$$

$$= \hat{x}(t_1) + \sum_{i=1}^{q} \int_{I_i} (\hat{F}(t, x^*(t), u_i(t)) - \hat{F}(t, x(t), u(t)))\,dt +$$

$$+ \int_{I^*} (\hat{F}(t, x^*(t), u(t)) - \hat{F}(t, x(t), u(t)))\,dt.$$

Calculînd, avem

$$a)\ J_i = \int_{I_i} (\hat{F}(t, x^*(t), u_i(t)) - \hat{F}(t, x(t), u(t)))\,dt =$$

$$= \int_{\tau_i + \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^{i-1})}^{\tau_i + \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^i)} (\hat{F}(t, x^*(t), u_i(t)) - \hat{F}(t, x(t), u(t)))\,dt =$$

$$= \varepsilon\delta\tau^i(\hat{F}(\tau_i, x^*(\tau_i), u_i(\tau_i)) - \hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), u(\tau_i))) + 0(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\delta\tau^i(\hat{F}(\tau_i, x^*(\tau_i), v_i) - \hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), u(\tau_i))) + 0(\varepsilon),$$

conform teoremei de medie

Dar

$$\hat{F}(\tau_i, x^*(\tau_i), v_i) = \hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), v_i) +$$

$$+ \partial_{\hat{x}} \hat{F}(\tau_i, (1 - \theta)\,x(\tau_i) + \theta\,x^*(\tau_i), v_i)(\hat{x}^*(\tau_i) - \hat{x}(\tau_i))$$

cu

$$\theta \in [0,1].$$

Aşadar,

$$J_i = \varepsilon\delta\tau^i (\hat{F}\ (\tau_i,\ x\ (\tau_i),\ v_i) - \hat{F}\ (\tau_i,\ x\ (\tau_i),\ u\ (\tau_i))) +$$

$$+ \varepsilon\delta\tau^i\ \partial_{\hat{x}} \hat{F}(\tau_i, (1 - \theta)\ x\ (\tau_i) + \theta\ x^*\ (\tau_i), v_i)\ (\hat{x}^*\ (\tau_i) - \hat{x}\ (\tau_i)) + 0\ (\varepsilon).$$

Cum însă $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} (\hat{x}^*\ (\tau_i) - \hat{x}\ (\tau_i)) = 0$, rezultă că cel de-al doilea termen al lui J_i este de tipul $0(\varepsilon)$, $\partial_{\hat{x}}\ \hat{F}$ fiind continuă pe segmentul $[\hat{x}(\tau_i), \hat{x}^*\ (\tau_i)]$.

În definitiv,

$$I_i = \varepsilon\ \delta\tau^i\ (\hat{F}\ (\tau_i, x\ (\tau_i), v_i) - \hat{F}\ (\tau_i,\ x(\tau_i),\ u(\tau_i))) + 0\ (\varepsilon).$$

$$b)\ J^* = \int_{I^*} (\hat{F}\ (t,\ x^*\ (t),\ u\ (t)) - \hat{F}\ (t,\ x\ (t),\ u\ (t)))\ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{I^*} \left[\int_0^1 \partial_{\hat{x}}\ \hat{F}\ (t, (1 - \theta)\ x\ (t) + \theta\ x^*\ (t),\ u\ (t),\ \mathrm{d}\theta \right] (\hat{x}^*\ (t) - \hat{x}\ (t))\ \mathrm{d}t.$$

Atunci

$$\frac{J^*}{\varepsilon} = \int_{I^*} \left[\int_0^1 \partial_{\hat{x}}\ \hat{F}\ (t, (1 - \theta)\ x\ (t) + \theta x^*\ (t),\ u\ (t))\ \mathrm{d}\theta \right] \frac{\hat{x}^*\ (t) - \hat{x}\ (t)}{\varepsilon}\ \mathrm{d}t;$$

or, conform teoremei de dependenţă a soluţiei unui sistem de ecuaţii diferenţiale de un parametru avem

$$\frac{\hat{x}^*\ (t) - \hat{x}\ (t)}{\varepsilon}$$ este uniform mărginit în raport cu I cînd $\varepsilon \to 0$

În acelaşi timp,

$$\partial_{\hat{x}} \hat{F}(t, (1-\theta)\, x(t) + \theta x^*(t), u(t)) \xrightarrow{\text{continuu}} \partial_{\hat{x}} \hat{F}(t, x(t), u(t)) = 0,$$

conform proprietăţii 2).

Aşadar,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J^*}{\varepsilon} = 0.$$

Deci în final

$$\hat{x}^*(t_1) = \hat{x}(t_1) + \varepsilon \sum_{i=1}^{q} \delta\tau^i (\hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), v_i) - \hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), u(\tau_i))) +$$

$$+ 0(\varepsilon), \text{ cu } \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Fie acum $C^q(M)$, cubul pozitiv q — dimensional de latură M. Alegem ε_0 suficient de mic astfel încît să fie valabilă reprezentarea lui $\hat{x}^*(t_1)$ de mai sus, adică să fie îndeplinite condiţiile 4 a, 4b, 4c şi proprietatea π. Comanda variată u^* este reprezentată prin parametrul q — dimensional $\rho = (\varepsilon\delta\tau^q, \ldots \varepsilon\delta\tau^q)$, continuu pe $C^q(M) \times [0, \varepsilon_0]$. Conform teoremei de dependenţă a soluţiei de un parametru, aceasta va depinde continuu de ρ deci şi de ε şi $\delta\tau$, variind în intervalul $[0, \varepsilon_0]$, respectiv $C^q(M)$, şi, prin urmare $\hat{x}^*(t_1)$, depinde continuu de ε şi $\delta\tau$ pe $C^q(M) \times [0, \varepsilon_0]$. Propoziţia este astfel complet demonstrată, întrucît, în afară de reprezentarea lui $\hat{x}^*(t_1)$ de forma

$$\hat{x}^*(t_1) = \hat{x}(t_1) + \varepsilon \sum_{i=1}^{q} \delta\tau^i (\hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), v_i) - \hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), u(\tau_i))) + 0(\varepsilon),$$

s-a demonstrat şi dependenţa continuă a acestuia de variabilele $\delta\tau$ şi ε.

PROPOZIŢIA 2. Dacă $\bar{u} \in \Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0, t_1)$ este optimală atunci există $R^{n+1} \ni \hat{\lambda} \neq 0$, astfel încît pentru orice $\hat{\xi} \in \hat{M}(\hat{\bar{x}}(t_1)) = \hat{M}((J(\bar{u}), x_1))$, avem

$$<\hat{\lambda}, \hat{\xi}> \leqslant 0.$$

Demonstrația este imediată, fiind o consecință a teoremei de la 2.2.3. căci $\hat{M}\ (\hat{\bar{x}}(t_1))$ este o mulțime derivată relativ la un punct extrem în raport cu prima coordonată. Reamintim că în acest caz traiectoria optimală este traiectoria de transport.

Explicit se poate scrie

$$< \hat{\lambda},\ \hat{F}\ (t,\ \bar{x}\ (t),\ v) - \hat{F}\ (t,\ \bar{x}\ (t),\ \bar{u}\ (t)) > \leqslant 0,$$

unde

$-\ v \in U$;

$-\ t$ fiind punct de continuitate al comenzii optimale $\bar{u}$.

Relația de mai sus poate fi extinsă prin continuitate la toate punctele intervalului I, considerînd șiruri convergente de puncte de continuitate ale lui $\bar{u}$ către punctele de discontinuitate ale aceleiași comenzi și trecînd la limită

Așadar, pentru orice $v \in U, t \in I$

$$< \hat{\lambda}, \hat{F}\ (t, \bar{x}, (t), v) > \leqslant < \hat{\lambda}, \hat{F}\ (t, \bar{x}\ (t), \bar{u}\ (t)) >$$

sau

$$< \hat{\lambda},\ \hat{\bar{\psi}}^T\ (t, t_1)\ \hat{f}\ (t, \bar{x}\ (t), v) + \frac{d\,\hat{\bar{\psi}}^T\ (t, t_1)}{dt}\ \hat{\bar{x}}\ (t) > \leqslant$$

$$< \hat{\lambda},\ \hat{\bar{\psi}}^T\ (t, t_1)\ \hat{f}\ (t, \bar{x}\ (t), \bar{u}\ (t)) + \frac{d\,\hat{\bar{\psi}}^T\ (t, t_1)}{dt}\ \hat{\bar{x}}\ (t) >,$$

adică

$$< \hat{\bar{\psi}}\ (t, t_1)\ \hat{\lambda}, \hat{f}\ (t, \bar{x}\ (t), v) > \leqslant < \hat{\bar{\psi}}\ (t, t_1)\ \hat{\lambda}, \hat{f}\ (t, \bar{x}\ (t), u\ (t)) > .$$

Punînd

$$\hat{\bar{\psi}}\ (t_1) = \hat{\lambda},$$

soluția sistemului asociat traiectoriei optimale este

$$\hat{\bar{\psi}}\ (t) = \hat{\bar{\psi}}\ (t, t_1)\ \hat{\bar{\psi}}\ (t_1)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi, în definitiv,

$$<\hat{\bar{\psi}}(t), \hat{f}(t, \bar{x}(t), v)> \leqslant <\hat{\bar{\psi}}(t), \hat{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))>.$$

Se poate deci enunţa

PROPOZIŢIA 3. Pentru orice conducere optimală există o soluţie nebanală a sistemului asociat traiectoriei optimale $\hat{\bar{\psi}}$, astfel încît pentru orice $t \in I$ şi $v \in U$

$$<\hat{\bar{\psi}}(t), \hat{f}(t, \bar{x}(t), v)> \leqslant <\hat{\bar{\psi}}(t), \hat{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))>.$$

2.3.5. FORMALISMUL LUI HAMILTON ŞI PRINCIPIUL MAXIMULUI LUI PONTREAGHIN

Fie definită pe $R^{n+1} \times I \times D \times U$, cu valori în R^1, funcţia

$$\mathcal{H}(\hat{\psi}, t, x, u) = <\hat{\psi}, \hat{f}(t, x, u)>.$$

Se constată imediat că se poate obţine o reprezentare de tip Hamilton — Jacobi a sistemului de ecuaţii diferenţiale iniţial şi asociat. Într-adevăr,

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \mathcal{H}_{\hat{\psi}}(\hat{\psi}, t, x, u),$$

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = -\mathcal{H}_{\hat{x}}(\hat{\psi}, t, x, u).$$

Fie de asemenea definită pe $R^{n+1} \times \dot{I} \times D$, cu valori în R^1, funcţia

$$\mathfrak{M}(\hat{\psi}, t, x) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\hat{\psi}, t, x, u) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\hat{\psi}, t, x, u),$$

ultima egalitate fiind valabilă numai dacă U este un compact.

Conform propoziției 3 de la 2.3.4. în orice punct al intervalului de conducere I pentru traiectoria optimală avem

$$\mathcal{H}\left(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) = \mathfrak{M}\left(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t)\right),$$

deoarece

$$\mathcal{H}\left(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), v\right) \leqslant \mathcal{H}\left(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)$$

pentru orice $t \in I$ și $v \in U$.

Fie introdusă funcția

$$\varphi : I \times U \to R^1$$

prin

$$\varphi(t, v) = \mathcal{H}\left(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), v\right).$$

Avem, evident,

$$\varphi(t, v) \leqslant \varphi(t, \bar{u}(t)).$$

Ne propunem să demonstrăm următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 1. Fie

1) $\varphi : I \times U \to R^1$ continuă cu $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ continuă pe I;

2) $\bar{u} : I \to U$ continuă pe porțiuni (existînd deci $u(t-0)$ și $u(t+0)$), astfel încît

$$\varphi(t, v) \leqslant \varphi(t, \bar{u}(t)) \triangleq \chi(t).$$

Atunci

1) $\chi : I \to R^1$ este continuă pe I;

2) pe orice interval de continuitate a lui $\bar{u}$:

$$\frac{\mathrm{d}\chi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varphi(t, \bar{u}(t))}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\varphi(t, \bar{u}(t))}{\mathrm{d}t},$$

ceea ce este echivalent cu

$$\chi(t) = \chi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \varphi(\tau, \bar{u}(\tau))}{\partial t} \, d\tau$$

pentru orice $t \in I$.

Demonstrație. 1. Fie $t \in I$

$$\chi(t+h) = \varphi(t+h, \bar{u}(t+h)) \geqslant \varphi(t+h, \bar{u}(t)),$$

adică

$$\chi(t+h) \geqslant \left| \begin{array}{l} \varphi(t+h, \bar{u}(t-0)), \\ \varphi(t+h, \bar{u}(t+0)). \end{array} \right.$$

Făcînd $h \to 0$ prin valori pozitive și negative și ținînd cont de continuitatea lui φ în raport cu t, rezultă

— pentru $\chi(t+h) \geqslant \varphi(t+h, \bar{u}(t-0))$, $h \to 0$ cu $h > 0$:

$$\chi(t+0) \geqslant \varphi(t+0, \bar{u}(t-0)) = \varphi(t, \bar{u}(t-0)) =$$

$$= \varphi(t-0, \bar{u}(t-0)) = \chi(t-0),$$

egalitățile fiind scrise pe baza continuității lui φ în raport cu t;

— pentru $\chi(t+h) \geqslant \varphi(t+h, \bar{u}(t+0))$, $h \to 0$ cu $h < 0$:

$$\chi(t-0) \geqslant \varphi(t-0, \bar{u}(t+0)) = \varphi(t, \bar{u}(t+0)) =$$

$$= \varphi(t+0, \bar{u}(t+0)) = \chi(t+0),$$

Așadar,

$$\chi(t+0) = \chi(t-0).$$

unde menționăm : în t_0, $h \to 0$ cu $h > 0$ și în t_1, $h \to 0$ cu $h < 0$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie acum $[t-h,\ t+h]$, $h>0$, un interval de continuitate al lui $\bar{u}$:

$$\frac{\chi(t+h)-\chi(t)}{h}=\frac{\varphi(t+h,\ \bar{u}(t+h))-\varphi(t,\ \bar{u}(t))}{h}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}\geqslant\dfrac{\varphi(t+h,\ \bar{u}(t))-\varphi(t,\ \bar{u}(t))}{h}=\dfrac{\partial\varphi(t+\theta'h,\ u(t))}{\partial t},\\ \leqslant\dfrac{\varphi(t+h,\ \bar{u}(t+h))-\varphi(t,\ \bar{u}(t+h))}{h}=\dfrac{\partial\varphi(t+\theta''h,\ u(t+h))}{\partial t},\end{cases}$$

cu $\theta',\ \theta''\in[0,\ 1]$.

Aşadar,

$$\frac{\partial\varphi(t+\theta'h,\ \bar{u}(t))}{\partial t}\leqslant\frac{\chi(t+h)-\chi(t)}{h}\leqslant\frac{\partial\varphi(t+\theta''h,\bar{u}(t+h))}{\partial t}$$

cu $h>0$

şi, în consecinţă,

$$\frac{\mathrm{d}\chi(t+0)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\varphi(t,\ \bar{u}(t))}{\partial t}.$$

Analog

$$\frac{\partial\varphi(t+\theta''h,\ \bar{u}(t+h))}{\partial t}\leqslant\frac{\chi(t-h)-\chi(t)}{-h}\leqslant\frac{\partial\varphi(t+\theta'''h,\ u(t))}{\partial t}$$

cu $h>0$

şi, în consecinţă,

$$\frac{\mathrm{d}\chi(t-0)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\varphi(t,\ \bar{u}(t))}{\partial t}.$$

Aşadar,

$$\frac{\partial \varphi(t, \bar{u}(t))}{dt} = \frac{\partial \varphi(t, \bar{u}(t))}{\partial t}.$$

Deci χ este continuă cu derivata continuă pe porţiuni.
Cu această afirmaţie, propoziţia este complet demonstrată.

Se poate enunţa acum :

Principiul maximului. Pentru orice comandă $\bar{u} \in \Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0, t_1)$ optimală există o soluţie nebanală $\hat{\bar{\psi}}$ a sistemului asociat traiectoriei optimale $\bar{x}(t)$, astfel încît

$$1)\ \mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathfrak{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t))$$

pentru orice $t \in I$, fiind continuă în timp ;

2) pe orice interval de continuitate a lui $\bar{u}$

$$\frac{d\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\partial t};$$

$$3)\ \bar{\psi}_0 = \text{ct} \leqslant 0.$$

Demonstraţia punctelor 1) şi 2) este o consecinţă a propoziţiei 3 de la 2.3. 4 în ceea ce priveşte egalitatea exprimată de 1) şi a propoziţiei 1 de la 2.3.5 în ceea ce priveşte continuitatea atît a funcţiei $\mathfrak{M}$, ca funcţie de timp în totalitate, cît şi a egalităţii de la punctul 2).

Întrucît $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^0} = 0$, rezultă că $\frac{d\psi_0}{dt} = 0$, adică

$$\bar{\psi}_0(t) = \bar{\psi}_0(t_1) = \lambda_0 \leqslant 0,$$

astfel că şi punctul 3) este demonstrat.

Observaţie. În cazul sistemelor autonome pe baza lui 2) rezultă că

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{x}(t), u(t)) = \mathfrak{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{x}(t)) = \text{ct.}\ t \in I.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.3.6. INTRODUCEREA CONDIȚIILOR IZOPERIMETRICE

Impunem restricții suplimentare comenzilor strict admisibile, în sensul că orice conducere trebuie să satisfacă în plus și condiții de tip izoperimetric :

$$\int_I g^i\,(t,\ x\,(t),\ u(t))\ \mathrm{d}t = a^i,\quad 1 \leqslant i \leqslant p,$$

unde $g^i : R^1 \times R^n \times U \to R^1$, de același tip cu funcțiile $f^i, 0 \leqslant i \leqslant n$.

Introducem următoarea extensiune :

$$\hat{\hat{X}} = R^1 \times R^p \times X;$$

$$\hat{\hat{f}} = (f^0,\ g^1,\ \ldots,\ g^p,\ f^1, \ldots,\ f^n);$$

$$\hat{\hat{x}} = (x^0, y^1, \ldots, y^p,\ x^1, \ldots, x^n);$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\hat{x}}}{\mathrm{d}t} = \hat{\hat{f}}\ (t,\ x,\ u),$$

cu condițiile finale impuse, scrise în extensiunea definită mai sus :

$$\hat{\hat{x}}\,(t_0) = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ x_0^1,\ \ldots,\ x_0^n) = \hat{\hat{x}}_0;$$

$$\hat{\hat{x}}\ (t_1) = (J\,(u),\ a^1,\ \ldots,\ a^p,\ x_1^1,\ \ldots\ x_1^n) = \hat{\hat{x}}_1.$$

Se vede imediat din scrierea lui

$$\hat{\hat{x}}\ (t_1) = \hat{\hat{x}}\,(t_0) + \int_I \hat{\hat{f}}\,(t,\ x\,(t),\ u\,(t))\ \mathrm{d}t,$$

pe componente, că problema de conducere astfel extinsă cuprinde și condițiile izoperimetrice.

Clasa comenzilor strict admisibile va fi notată

$$\Sigma\,(X,\ U,\ x_0,\ x_1,\ a,\ t_0,\ t_1),$$

unde

$$a = (a^1, \ldots, a^p).$$

Clasa comenzilor admisibile va rămîne aceeaşi, proprietatea π presupunînd-o în continuare valabilă.

Problema de optimalitate se formulează astfel : să se găsească o comandă strict admisibilă $\bar{u} \in \Sigma(X, U, x_0, x_1, a, t_0, t_1)$ pentru care $J(u)$ este minim. Se vede că, în plus trebuie satisfăcute şi condiţiile de tip izoperimetric. Traectoria optimală va fi notată $\hat{\hat{\bar{x}}}(t)$ şi are caracteristic.

$$\hat{\hat{\bar{x}}}(t_1) = (J(\bar{u}), a, x_1).$$

Introducem, analog ca la 2.3.2, mulţimea

$$\hat{\hat{A}}\ (\Sigma(X, U, x_0, t_0)) \text{ în } \hat{\hat{X}}\ (\hat{\hat{\bar{x}}}(t_1)).$$

Matricea sistemului în variaţii este de-a lungul unei traiectorii oarecare cauzate de o comandă admisibilă

$$\partial_{\dot{x}} \hat{\hat{f}}\Big|_{(t, x(t), u(t))} = \hat{\hat{D}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^0}{\partial x^0} & \frac{\partial f^0}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial f^0}{\partial y^p} & \frac{\partial f^0}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f^0}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g^1}{\partial x^0} & \frac{\partial g^1}{\partial y'} \cdots \frac{\partial g^1}{\partial y^p} & \frac{\partial g^1}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial g^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g^p}{\partial x^0} & \frac{\partial g^p}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial g^p}{\partial y^p} & \frac{\partial g^p}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial g^p}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^0} & \frac{\partial f^1}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial f^1}{\partial y^p} & \frac{\partial f^1}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^0} & \frac{\partial f^n}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial f^n}{\partial y^p} & \frac{\partial f^n}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{(t, x(t), u(t))} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\ 0 \ldots 0 & \frac{\partial f^0}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^0}{\partial x^n} \\ 0\ 0 \ldots 0 & \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial g^n}{\partial x^n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ 0 \ldots 0 & \frac{\partial g^p}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial g^p}{\partial x^n} \\ 0\ 0 \ldots 0 & \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ 0 \ldots 0 & \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} (t, x(t), u(t))$$

și, prin urmare,

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\hat{\xi}}}{\mathrm{d}t} = \hat{\hat{D}}(t)\,\hat{\hat{\xi}}, \quad \text{sistemul în variații;}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\hat{\psi}}}{\mathrm{d}t} = -\hat{\hat{D}}^T(t)\,\hat{\hat{\psi}}, \quad \text{sistemul asociat.}$$

Primul sistem are matricea fundamentală $\hat{\hat{\Xi}}(t, \tau)$, iar cel de-al doilea $\hat{\hat{\Psi}}(t, \tau)$, unde reamintim că : $\hat{\hat{\Xi}}^{-1}(t, \tau) = \hat{\hat{\Psi}}(t, \tau)$.

Introducem analog ca la 2.3.4 :

$$\hat{\hat{F}}(t, x, u) = \hat{\hat{\Psi}}^T(t, t_1)\ \hat{\hat{f}}(t, x, u) + \frac{\mathrm{d}\hat{\hat{\Psi}}^T}{\mathrm{d}t}\hat{\hat{x}}.$$

și, în consecință, mulțimea $\hat{\hat{M}}(\hat{\hat{x}}(t_1))$. Se poate arăta exact prin aceeași procedură folosită la propoziția nr. 1 de la 2.3.4 că aceasta este o

mulțime derivată a lui $\hat{\hat{A}}\ (\Sigma\ (X,\ U,\ x_0,\ t_0))$ relativ la $\hat{\hat{x}}\ (t_1)$. Atunci în $\hat{\hat{x}}(t_1)$ se poate aplica principiul separabilității. Rezultă deci următoarea extensiune a principiului maximului:

Pentru orice comandă optimală $\bar{u} \in \Sigma\ (X,\ U,\ x_0,\ x_1,\ a,\ t_0,\ t_1)$ există o soluție nebanală $\hat{\hat{\psi}}$ a sistemului asociat, astfel încît:

$$1)\ \mathcal{H}\ (\hat{\hat{\psi}}\ (t),\ t,\ \bar{x}\ (t),\ \bar{u}\ (t)) = \mathfrak{M}\ (\hat{\hat{\psi}}\ (t),\ t, \bar{x}(t))$$

pentru orice $t \in I$, continuă în timp;

$$2)\ \frac{\mathrm{d}\ \mathcal{H}\ (\hat{\hat{\psi}}\ (t),\ t,\ \bar{x}\ (t),\ \bar{u}\ (t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}\ (\hat{\hat{\psi}}\ (t),\ t,\ \bar{x}\ (t),\ \bar{u}\ (t))}{\partial t}$$

pe orice interval de continuitate al comenzii optimale;

$$3)\ \hat{\hat{\psi}}\ (t) = (\bar{\psi}_0,\ \underbrace{\mu_1,\ \ldots\ \mu_p}_{\text{ct}},\ \bar{\psi}_1\ (t),\ \ldots,\ \bar{\psi}_n\ (t)),$$

cu

$$\bar{\psi}_0 = \text{ct} \leqslant 0,$$

$$\hat{\hat{\psi}}\ (t_1) = (\lambda_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_p\ \ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n),$$

normala hiperplanului de separație.

Demonstrarea punctelor 1) și 2) este, evident, identică cu cea a principiului maximului în prima formulare, iar afirmația de la 3) rezultă imediat din faptul că primele $p+1$ coloane ale matricei $\partial_{\hat{\hat{x}}}\ \hat{\hat{f}}$ sînt identic nule.

Detaliind expresia funcției $\mathcal{H}$ în acest caz, se obține

$$\mathcal{H}\ (\hat{\hat{\psi}}\ t,\ x,\ u) = \psi_0 f^0 + \mu_1 g^1 + \ldots + \mu_p\ g^p\ + \psi_1 f^1 + \ldots + \psi_n f_n^0$$

unde $\psi_0 \leqslant 0$, $\mu_1, \ldots \mu_p$ sînt constante.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea sistemul asociat se scrie

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = -\hat{D}^T \hat{\psi} - \partial_{\hat{x}}^T g \mu.$$

2.3.7. PROBLEMA DE TIP LAGRANGE

Acest tip de problemă reprezintă unul dintre modurile de explicitare a mulțimii $I \times D \times U$ introduse foarte general, fără alte precizări, în paragraful 2.3.1, precum și de punere în evidență a proprietății π.

Fie

1) $A \subset R^1 \times R^n \times R^r = R^{n+r+1}$ deschisă, produsul cartezian subînțelegînd că sînt interesante trei componente ale spațiului, scrise sub forma tripletului de variabile vectoriale $(t, x, u) \in R^1 \times R^n \times R^r$;

2) $\varphi : A \to R^p$ cu $\varphi \in C^1(A)$,

unde

$$\varphi(t, x, u) = (\varphi^1(t, x, u), \ldots, \varphi^p(t, x, u)).$$

Se presupune că

3) $E = \{(t, x, u) \mid \varphi(t, x, u) = 0\} \neq \emptyset$

și că matricea

4) $\partial_u \varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^p}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^p}{\partial u^r} \end{bmatrix}$

are rangul p în E.

Se poate enunța atunci :

PROPOZIȚIA 1. Există o mulțime deschisă $G : E \subset G \subset A$ și o funcție $v : G \to R^r$ continuă, astfel încît

1) $(t, x, u) \in G \to (t, x, v(t, x, u)) \in E$;

2) $(t, x, u) \in E \to v(t, x, u) = u$.

Demonstrație. Să presupunem că E este un compact și fie sistemul de ecuații

$$\chi(t, x, u, y) = \varphi(t, x, u + \partial_u^T \varphi\, y) = 0,$$

unde

$$y = (y^1, \ldots, y^m),$$

interesant de rezolvat în raport cu y ca necunoscută.

Mulțimea de definiție a lui χ este deschisă, fiind determinată de $(t, x, u) \in A$ și simultan $(t, x, u + \partial_u^T \varphi y) \in A$, lucru posibil întrucît A este desehisă, și deci există modificări prin aditivitate a lui u suficient de mici și în orice direcție astfel ca acesta să rămînă tot în A.

Sînt satisfăcute atunci referitor la aplicația χ următoarele condiții :

1) există o aplicație continuă y_0 definită pe compactul E cu valori în R^m, adică $y_0(t, x, u) \in R^m$, astfel încît

2) $(t, x, u, y_0(t, x, u))$ aparține mulțimii deschise de definiție a lui χ;

3) $\chi(t, x, u, y_0(t, x, u)) = 0$;

4) $|\partial_y \chi(t, x, u, y, y_0(t, x, u))| \neq 0$.

Într-adevăr, fie y_0 definită banal pe E prin

$$y_0(t, x, u) = 0,$$

care este continuă și satisface condițiile 1), 2), 3), după cum ușor se poate verifica. În ceea ce privește condiția 4), din

$$\partial_y \chi = \partial_u \varphi\, \partial_u^T \varphi \text{ care este, } p \times p - \text{matrice},$$

rezultă că 4) este imediat satisfăcută, referitor, evident, la E. De asemenea se vede imediat că are sens a se introduce şi jacobianul $|\partial_v \chi|$.

Conform teoremei globale (adică referitoare la un compact E, nu local) a funcţiilor implicite, există o mulţime deschisă G cu $E \subset G \subset A$ şi o aplicaţie continuă μ definită pe G, astfel încît

1) $\mu(t, x, u)|_E = y_0(t, x, u)$;
2) $\chi(t, x, u, \mu(t, x, u)) = 0$.

Se vede atunci imediat că v definită pe G prin

$$v(t, x, u) = u + \partial_u^T \varphi \mu(t, x, u)$$

este tocmai funcţia căutată.

Într-adevăr,

$$(t, x, u) \in G \to (t, x, v(t, x, u)) \in E,$$

căci

$$\varphi(t, x, v(t, x, u)) = \varphi(t, x, u + \partial_u^T \varphi \mu(t, x, u)) =$$

$$= \chi(t, x, u, \mu(t, x, u)) = 0,$$

iar

$$(t, x, u) \in E \to v(t, x, u) = u,$$

căci

$$v(t, x, u)|_E = u + \partial_u^T \varphi y_0(t, x, u) = u + 0 = u,$$

şi astfel, în cazul cînd E este compactă, propoziţia este complet demonstrată.

În cazul cînd E nu este compactă, ea poate fi pusă sub forma unei reuniuni infinite de mulţimi compacte E_i:

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Scanned with OKEN Scanner

Referitor la fiecare E_i va exista o mulţime deschisă $G_i \supset E_i$ şi o aplicaţie corespunzătoare, μ_i, μ_i rămînînd valoric în vecinătatea lui $0 \in R^m$, căci $y_{0i}(t, x, u) = 0$ pe E_i cînd (t, x, u) variază în G_i. Atunci μ_i este unică pe G_i suficient de „apropiat" de E_i. Are sens deci să definim pe $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ funcţia μ prin

$$\mu|_{G_i} = \mu_i,$$

care, evident, nu este multiformă, căci, dacă $G_i \cap G_j \neq \emptyset$, atunci μ_i şi μ_j se confundă pe această intersecţie, conform unicităţii.

Aşadar, propoziţia este complet demonstrată.

Corolar fundamental. Propoziţia 1 implică o consecinţă esenţială în definirea riguroasă a problemei lui Lagrange.

Aşa cum s-a văzut la 2.3.1, am introuds produsul cartezian $[t_0, t_1] \times D \times U$, $D \supset X$, precizîndu-se astfel mulţimile de variaţie ale tripletului (t, x, u), decompozabilitate necesară în precizarea timpului, a restricţiilor în spaţiul fazelor şi a mulţimii mărimilor de comandă.

Or, apriori nu ne putem permite să afirmăm că E definită mai înainte admite cel puţin local o decompozabilitate carteziană ca cea de mai sus. Acest lucru devine riguros posibil abia după ce a fost demonstrată propoziţia 1. Fie, în consecinţă, $(t_*, x_*, u_*) \in E$ şi ρ suficient de mic ca $V_\rho((t_*, x_*, u_*)) \subset G$. Fie precizat în sferoidul de mai sus produsul cartezian

$$I \times D \times U^* \ni (t, x, u),$$

unde I este un interval închis, D un domeniu, $U^* \subset R^r$.

Evident, în baza propoziţiei 1, avem

$$I \times D \times v(I \times D \times U^*) \subset E$$

sau, notînd cu U mulţimea $v(I \times D \times U^*)$,

$$I \times D \times U \subset E.$$

Are deci sens să vorbim despre o comandă $u : I \to U$ continuă pe porțiuni astfel încît pentru orice $t \in I$ să avem

$$(t, x, u(t)) \in E,$$

unde x este ales convenabil, de exemplu $x \in D$, adică

$$\varphi(t, x, u(t)) = 0.$$

În cele ce urmează vom putea presupune deci posibilă *cel puțin local* introducerea următoarelor elemente compatibile cu restricțiile lagrangeene :

1) $I = [t_0, t_1]$ un interval închis ;
2) $U \subset R^r$;
3) $\overline{u} : I \to U$ continuă pe porțiuni, existînd puncte $x \in R^n$ astfel încît $I \times \{x\} \times U \subset E$. ($x \in D$ de exemplu). Vom vorbi însă și în general de puncte $(t, x, u) \in E$, fără a fi precizată mulțimea de variație a fiecărei componente, tripletul satisfăcînd numai condiția lui Lagrange

$$\varphi(t, x, u) = 0.$$

Fie acum următoarea

LEMĂ. Dacă $\varphi \in C^q(A)$, atunci v poate fi aleasă astfel încît $v \in C^q(G)$.

Observație. Din construcția inițială, evident, $v \in C^{q-1}(G)$.

Pentru a demonstra lema enunțată, facem apel la două propoziții pe care le vom demonstra în cele ce urmează.

PROPOZIȚIA 2. Fie $D \subset R^n$ un domeniu, $f : D \to R^1$ continuă, $K \subset D$ un compact. Există atunci o aplicație

$$\varphi : [0, 1] \times K \to R^1, \quad \varphi \in C^\infty(K),$$

astfel încît

$$\lim_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda, x) = f(x),$$

uniform în K,
numindu-se aproximația omotopică a lui f relativ la compactul K.

Demonstrație. Fie $r > 0$ suficient de mic astfel încît $2r$-vecinătatea compactă Q_{2r} a lui K să fie inclusă în D. Fie de asemenea $\rho : R^n \to R^1$ nenegativă și $\rho \in C^\infty(R^n)$, astfel încît

1) $\rho(x) = 0$,

îndată ce $\|x\| \geqslant 1$;

2) $$\int_{R^n} \rho(x)\, dx = 1.$$

Fie atunci definită pe $[0,1] \times K$ funcția

$$\varphi(\lambda, x) = \int_{Q_{2r}} f(y)\, \rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right) \frac{dy}{(\lambda r)^n}, \lambda \in (0, 1],\ x \in K.$$

Să considerăm un $\varepsilon > 0$ și un punct x arbitrar în K. Limita uniformă revine la a arăta că există un δ_ε dependent în exclusivitate de ε, astfel încît

$$0 < \lambda \leqslant \delta_\varepsilon \to |\varphi(\lambda, x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Pentru aceasta să considerăm Q_r, r-vecinătatea compactă a lui K. Evident, $K \subset Q_r \subset Q_{2r}$. Atunci f este uniform continuă pe Q_r. Deci există δ_ε dependent în exclusivitate de ε, astfel încît pentru orice y', $y'' \in Q_r$ cu $\|y' - y''\| \leqslant \delta_\varepsilon$ avem $|f(y') - f(y'')| \leqslant \varepsilon$.

Fie $\lambda \in (0, 1]$ suficient de mic ales, astfel încît

$$\lambda r \leqslant \delta_\varepsilon, \text{ adică } \lambda \leqslant \frac{\delta_\varepsilon}{r}.$$

Evident, $\overline{V}_{\lambda r}(x) \subset Q_r \subset Q_{2r}$ și deci pentru orice $y \in \overline{V}_{\lambda r}(x)$ avem $|f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Pe de altă parte însă, dacă $y \in \overline{V}_{\lambda r}(x)$, rezultă $\|x - y\| \leqslant \lambda r$ și deci

$$\left\| \frac{x-y}{\lambda r} \right\| \leqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, dacă y parcurge Q_{2r}, deci şi pe $\overline{V}_{2r}(x)$, valoarea raportului $\left\|\frac{x-y}{\lambda r}\right\|$ va depăşi, evident, unitatea. În consecinţă, $\rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right)$ va parcurge toate valorile sale dacă y parcurge Q_{2r}. Rezultă că

$$\int_{Q_{2r}} \rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right)\frac{dy}{(\lambda r)^n} = 1,$$

întrucît $\frac{x-y}{\lambda r}$ poate fi privită ca variabilă globală, $\frac{1}{(\lambda r)^n}$ fiind chiar jacobianul respectiv.

Aşadar,

$$|\varphi(\lambda, x) - f(x)| = \left|\int_{Q_{2r}} f(y)\,\rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right)\frac{dy}{(\lambda r)^n} -\right.$$

$$\left. - f(x)\int_{Q_{2r}} \rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right)\frac{dy}{(\lambda r)^n}\right| = \left|\int_{Q_{2r}} (f(y) - f(x))\,\rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right)\frac{dy}{(\lambda r)^n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{Q_{2r}} |f(y) - f(x)|\,\rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right)\frac{dy}{(\lambda r)^n}.$$

Dar y, depăşind $\overline{V}_{\lambda r}(x) \to \frac{\|x-y\|}{\lambda r} \geqslant 1$

şi deci $\rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right) = 0$. În consecinţă,

$$|\varphi(\lambda, x) - f(x)| \leqslant \int_{\overline{V}_{\lambda r}(x)} |f(y) - f(x)|\,\rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right)\frac{dy}{(\lambda r)^n} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{\overline{V}_{\lambda r}(x)} \rho\left(\frac{x-y}{\lambda r}\right)\frac{dy}{(\lambda r)^n} = \varepsilon.$$

În final, dacă $\lambda \leqslant \frac{\delta_\varepsilon}{r}$ independent de x, avem

$$|\varphi(\lambda, x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci φ tinde uniform către f cînd $\lambda \to 0$, $\varphi \in C^\infty(K)$. Propoziţia este complet demonstrată.

Să demonstrăm acum propoziţia 3 de mai jos, care de fapt va demonstra lema şi care se bazează pe propoziţia 2.

PROPOZIŢIA 3. Fie $A(x) = [a_j^i(x)]$ $\begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant q \end{matrix}$ o matrice continuă de rangul m în domeniul D. Există atunci o matrice $B \in C^\infty(D)$ astfel încît

$$\Delta(x) = |A(x)\, B(x)| \neq 0$$

în D.

Demonstraţie. Fie $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots \subset D$ un şir monoton de mulţimi compacte, astfel încît

1) $$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = D;$$

2) $$K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}.$$

Fie de asemenea $(\varphi_i)_{1 \leqslant i < \infty}$ din $C^\infty(R^n)$, astfel încît

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in K_i, \\ 1, & x \in \complement K_{i+1}. \end{cases}$$

Fie $B_0(x) = A^T(x)$ şi, evident,

$$\Delta_0(x) = |A(x)\, B_0(x)| \neq 0,$$

în D.

Să considerăm $\Phi_1(\lambda, x)$ aproximaţia omotopică a lui $B_0(x)$ relativă la K_3. Fie acum

$$\Psi_1(\lambda, x) = (1 - \varphi_2(x))\, \Phi_1(\lambda, x) + \varphi_2(x)\, B_0(x),$$

fiind continuă în D astfel:

$$\Psi_1(\lambda, x) = \begin{cases} \Phi_1(\lambda, x),\ x \in K_2 \supset K_1,\ \in C^\infty(K_2) \\ \text{„între" } \Phi_1 \text{ și } B_0 \text{ pentru } x \in K_3 \setminus K_2 \\ B_0(x),\ x \in D \setminus K_3. \end{cases}$$

Întrucît $\Psi_1(0, x) = B_0(x)$, există prin continuitate un $\lambda_1 > 0$ astfel încît $\Psi_1(\lambda_1, x)$ să implice în continuare

$$|A(x)\ \Psi_1(\lambda_1, x)| \neq 0$$

în D.

Se notează

$$B_1(x) = \Psi_1(\lambda_1, x), \text{ adică } \Delta_1(x) = |A(x)\ B_1(x)| \neq 0 \text{ în } D.$$

Fie $\Phi(\lambda_2, x)$ aproximația omotopică a lui $B_1(x)$ relativ la K_4 și fie

$$\Psi_2(\lambda, x) = (1 - \varphi_3(x))\ ((1 - \varphi_1(x))\ B_1(x) + \varphi_1(x)\ \Phi_2(\lambda, x)) + \\ + \varphi_3(x)\ B_1(x).$$

$$\Psi_2(\lambda, x) = \begin{cases} B_1(x) = \Psi_1(\lambda_1, x) = \Phi_1(\lambda_1, x),\ x \in K_1,\ \in C^\infty(K_1) \\ \text{„între" } B_1 \text{ și } \Phi_2,\ x \in K_2 \setminus K_1,\ \in C^\infty(K_2) \\ -\Phi_2(\lambda, x),\ x \in K_3 \setminus K_2,\ \in C^\infty(K_3) \\ \text{„între" } \Phi_2 \text{ și } B_0,\ x \in K_4 \setminus K_3 \\ B_0(x),\ x \in D \setminus K_4. \end{cases}$$

Se vede că $\Psi_2(0, x) = B_1(x)$ și, în consecință, există un $\lambda_2 > 0$ astfel încît în continuare să avem

$$|A(x),\ \Psi_2(\lambda_2, x)| \neq 0.$$

Se notează

$$B_2(x) = \Psi(\lambda_2, x), \text{ adică } \Delta_2(x) = |A(x)\ B_2(x)| \neq 0 \text{ în} D,$$

cu

$$B_2(x) = \begin{cases} B_1(x), & x \in K_1, \\ \text{de clasă } C^\infty(K_3), \\ B_0(x), & x \in D \setminus K_4 \end{cases}$$

şi continuu în D.

Să presupunem că am construit $B_p(x)$ astfel încît

$$B_p(x) = \begin{cases} B_{p-1}(x), & x \in K_{p-1} \\ \text{de clasă } C^\infty(K_{p+1}) \\ B_0(x), & x \in D \setminus K_{p+2} \end{cases}$$

şi continuu în D. De asemenea $\Delta_p(x) = |A(x)\, B_p(x)| \neq 0$ în D.

Fie $\Phi_{p+1}(\lambda, x)$ aproximaţia omotopică a lui $B_p(x)$ relativă la K_{p+3}. Se introduce

$$\Psi_{p+1}(\lambda, x) = (1 - \varphi_{p+2}(x))\,((1 - \varphi_p(x))\, B_p(x) + \\ + \varphi_p(x)\, \Phi_{p+1}(\lambda, x)) + \varphi_{p+2}(x)\, B_p(x),$$

cu

$$\Psi_{p+1}(\lambda, x) = \begin{cases} B_p(x), & x \in K_p, \in C^\infty(K_p) \\ \text{„între” } B_p \text{ şi } \Phi_{p+1}, & x \in K_{p+1} \setminus K_p, \in C^\infty(K_{p+1}) \\ \Phi_{p+1}(\lambda, x), & x \in K_{p+2} \setminus K_{p+1}, \in C^\infty(K_{p+2}) \\ \text{„între” } \Phi_{p+1} \text{ şi } B_0, & x \in K_{p+3} \setminus K_{p+2} \\ B_0(x), & x \in D \setminus K_{p+3}. \end{cases}$$

De asemenea

$$\Psi_{p+1}(0, x) = B_p(x).$$

Deci există un $\lambda_{p+1} > 0$ astfel încît în continuare să avem

$$|A(x)\,\Psi_{p+1}(\lambda_{p+1}, x)| \neq 0 \text{ în } D.$$

Atunci notăm

$$B_{p+1}(x) = \Psi_{p+1}(\lambda_{p+1}, x).$$

În definitiv, fie atunci

$B(x) = B_i(x)$, $x \in K_i$ fiind în $C^{\infty}(K_i)$ şi cu

$\Delta(x) = \Delta_i(x) = |A(x)\,B_i(x)| \neq 0$, $1 \leqslant i < \infty$, $x \in K_i$ deci în D.

Astfel demonstraţia este completă. În figura 16 de mai jos dăm imaginea grafică a demonstraţiei.

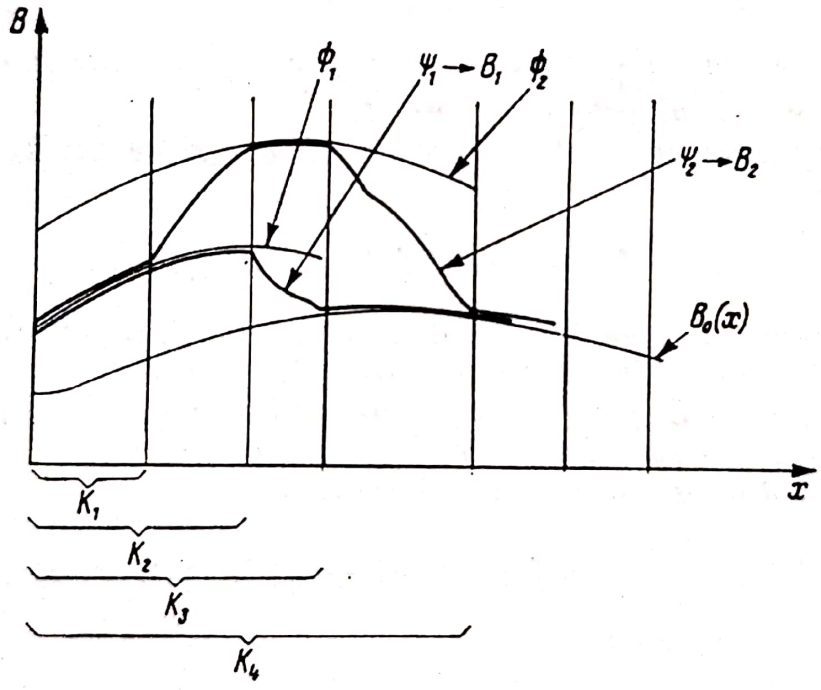


Fig. 16

Din cele două propoziţii de mai sus rezultă imediat valabilitatea lemei enunţate. Într-adevăr, dacă $\varphi \in C^{(q)}(A)$, atunci $\partial_u \varphi \in C^{(q-1)}(A)$; or, pe baza propoziţiei 3 de mai sus se poate considera o matrice $B \in C^{\infty}(A)$, deci şi de analiticitate q, astfel încît $|\partial_u \varphi B|$ să fie nenul în E în locul determinantului $|\partial_u \varphi\, \partial_u^T \varphi|$.

Considerînd acum ecuaţia în y:

$$\varphi(t,\ x,\ u+B\,y)=0,$$

soluţia μ a funcţiei implicite $\chi=0$ va fi cel puţin de clasă $C^q(G)$ şi, în consecinţă,

$$v=u+B\,\mu$$

va fi de clasă $C^q(G)$, ca o consecinţă directă a egalităţii care o defineşte.

Putem acum să introducem în mod riguros şi multiplicatorii lui Lagrange prin

TEOREMA 1. *Fie* $f: A\to R^1$, $f\in C^1(A)$ *şi* $\overline{u}: [t_0, t_1]=I\to R^r$ *continuă pe porţiuni, astfel încît să fie posibilă apartenenţa*

$$(t,\ x,\ \overline{u}(t))\in E$$

pentru orice $t\in[t_0,\ t_1]$, *definirea lui* $\overline{\mu}$ *fiind posibilă datorită corolarului fundamental al propoziţiei nr. 1.*

Presupunem că pentru orice $(t,\ x,\ u)\in E$ *cu* $t\in[t_0,\ t_1]$ *are loc inegalitatea*

$$f(t,\ x,\ u)\leqslant f(t,\ x,\ \overline{u}\ (t)).$$

Există atunci $\lambda: I\to R^p$, *adică* $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$, *avînd atîtea componente cîte restricţii introduce funcţia* $\varphi=(\varphi^1,\ldots,\varphi^p)$, *numite multiplicatorii lui Lagrange, o aplicaţie unică, astfel încît:*

1) λ *are aceleaşi intervale de continuitate cu* $\overline{u}$;

2) *introducînd funcţia lui Lagrange*

$$F(t,\ x,\ u,\lambda)=f(t,\ x,\ u)+<\lambda,\ \varphi(t,\ x,\ u)>,$$

avem pentru orice $t\in I$

$$\nabla_u F(t,\ x,\ \overline{u}\ (t),\ \lambda\ (t))=0\ ^*);$$

$$3)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(t,\ x,\ \overline{u}\ (t),\ \lambda\ (t)))=\frac{\partial}{\partial t}(F(t,\ x,\ \overline{u}\ (t),\ \lambda\ (t))),$$

---

*) Operaţia de derivare în raport cu u are sens, întrucît F este definită pe A, care este deschisă.

pe orice interval de continuitate a lui $\bar{u}$, *ceea ce este echivalent cu*

$$F(t, x, \bar{u}(t), \lambda(t)) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (F(\tau, x, \bar{u}(\tau), \lambda(\tau)))d\tau, \quad t \in I.$$

Demonstrație. Existența și unicitatea lui λ rezultă din teorema clasică a lui Lagrange, cunoscută din programarea matematică, și a cărei demonstrare o vom da la sfîrșitul paragrafului ca o simplă consecință a teoremei fundamentale de la 2.2.3. Menționăm că unicitatea este o consecință directă a faptului că $\partial_u \varphi$ are rangul p în E sau, cum se mai spune, punctele care satisfac restricțiile sînt puncte normale. În consecință:

Rămîne să demonstrăm 1) și 3). Fie atunci:

$$\nabla_u F(t, x, \bar{u}(t), \lambda(t)) \cdot \nabla_u f(t, x, \bar{u}(t)) + [\lambda(t), \partial_u \varphi(t, x, \bar{u}(t))]^{*}) = 0$$

adică:

$$\nabla_u f(t, x, \bar{u}(t)) + < [\lambda_1(t), \ldots, \lambda_p(t)], \begin{bmatrix} \nabla_u \varphi^1(t, x, \bar{u}(t)) \\ \vdots \\ \nabla_u \varphi^p(t, x, \bar{u}(t)) \end{bmatrix} > = 0,$$

sau, înmulțind pe dreapta cu $\partial_u^T \varphi$, rezultă

$$\nabla_u f(t, x, \bar{u}(t)) \partial_u^T \varphi(t, x, \bar{u}(t)) + (\partial_u \varphi \partial_u^T \varphi)(t, x, \bar{u}(t)) \lambda(t) = 0$$

și unde $|\partial_u \varphi \partial_u^T \varphi| \neq 0$ în E. În consecință

$$\lambda(t) = -(\partial_u \varphi \partial_u^T \varphi)^{-1}(t, x, \bar{u}(t)) \nabla_u f(t, x, \bar{u}(t)) \partial_u^T \varphi(t, x, \bar{u}(t)),$$

egalitate care reamintește modul de calcul al multiplicatorilor și care precizează prin compunerea funcțiilor care o definesc valabilitatea celor afirmate de punctul 1).

În fine, să demonstrăm și punctul 3) al teoremei. Este interesant înainte de toate de a atrage atenția că propoziția 1 de la 2.3.5

---

*) [ ] fiind produsul tensorial.

nu se poate aplica direct, întrucît în cazul acesta era explicitat produsul cartezian $I \times U$ care permitea implicaţiile de apartenenţă

$$(t, \bar{u}(t)) \in I \times U \to (t + h, \bar{u}(t) \in I \times U \text{ sau } (t, \bar{u}(t + h)) \in I \times U \text{ sau}$$

$$(t + h, \bar{u}(t + h)) \in I \times U,$$

cu $|h|$ suficient de mic ca $t+h \in I$, implicaţii care permiteau nemijlocit demonstrarea propoziţiei (în cazul extremităţilor lui I luîndu-se limitele corespunzătoare).

În consecinţă, înainte de a aplica propoziţia 1 de la 2.3.5, vom folosi propoziţia 1 din cadrul acestui paragraf.

Fie funcţia $v : G \to R^r$ aleasă de clasă $C^1(G)$, lucru posibil datorat lemei de mai sus, şi fie definită pe G funcţia

$$g(t, x, u) = f(t, x, v(t, x, u)).$$

Atunci pentru orice $(t, x, u) \in G$ avem

$$g(t, x, u) \leqslant g(t, x, \bar{u}(t)),$$

căci $(t, x, v(t, x, u)) \in E$, iar $v(t, x, \bar{u}(t)) = \bar{u}(t)$. Mulţimea G fiind deschisă, există $h \in R^1$ cu $|h|$ suficient de mic ca

$$t \in I, (t, x, \bar{u}(t)) \in E \to (t + h, x, \bar{u}(t)) \text{ sau } (t, x, \bar{u}(t + h))$$

sau $$(t + h, x, \bar{u}(t + h)) \in G \text{ şi } t + h \in I$$

şi deci

$$(t + h, x, v(t + h, x, \bar{u}(t + h))) \text{ sau } (t, x, v(t, x, \bar{u}(t + h)))$$

sau $$(t + h, x, v(t + h, x, \bar{u}(t + h))) \in E,$$

implicînd astfel valabilitatea inegalităţii referitoare la funcţia g.

Acum abia este posibilă aplicarea propoziției 1 de la 2.3.5, adică are loc egalitatea

$$g(t, x, \bar{u}(t)) = \int_{t_0}^{t} g_t(\tau, x, \bar{u}, (\tau)\, d\tau + c,$$

cu c convenabil ales. Dar

$$g_t(t,x,u) = f_t(t, x, v(t, x, u)) + f_u(t, x, v(t, x, u))\, v_u(t, x, u);$$

or, din

$$\varphi(t, x, u\ (t, x, u)) = 0\ (\text{în } G)$$

rezultă

$$\varphi_t(t, x, v(t, x, u)) + \varphi_u(t, x, v(t, x\, u))\, v_u(t, x, u) = 0,$$

din care motiv

$$F_t(t, x, v(t, x, u)) + F_u(t, x, v(t, x, u)), v_u(t, x, u) =$$

$$= f_t(t, x, v(t, x, u)) + f_u(t, x, v(t, x, u)\, v_u(t, x, u) = g_t(t, x, u),$$

iar conform cu punctul 1) al teoremei

$$F_u(t, x, v\ (t, x, \bar{u}, (t))) = F_u(t, x, \bar{u}(t)) = 0$$

de unde în definitiv

$$g_t(t, x, u(t) = F_t(t, x, \bar{u}(t))$$

și, evident,

$$f(t, x, \bar{u}\ (t)) = g\ (t,x, \bar{u}(t)) = F\ (t, x, \bar{u}(t)),$$

căci

$$\varphi(t, x, \bar{u}\ (t)) = 0,$$

rezultînd în final punctul 3) al teoremei, adică

$$F(t, x, \bar{u}\ (t)) = \int_{t_0}^{t} F_t(\tau, x, \bar{u}(\tau))\, d\tau + c.$$

Astfel teorema este complet demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Să arătăm acum că proprietatea π, introdusă la 2.3.4, este valabilă în cazul restricţiilor de tip lagrangeean. Fie, aşadar, $\{(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ o traiectorie admisibilă conţinută în E, supoziţie posibilă, cel puţin local, datorită corolarului fundamental al propoziţiei 1. În fond, valabilitatea proprietăţii π constă în posibilitatea construirii comenzii variate $\bar{u}^*$, compatibilă prin traiectoria pe care o cauzează cu restricţiile de tip lagrangeean.

Pentru fiecare punct $(t, \bar{x}(t)\ \bar{u}(t)) \in E$, oricare ar fi $t \in I$, am văzut că se poate ataşa mulţimea

$$E_t = I_t \times D_t \times U_t \subset E,\ t \in I = [t_0, t_1],$$

unde

$$U_t = v(I_t \times D_t \times U_t^*) \quad \text{şi} \quad I_t \times D_t \times U_t^* \subset G.$$

Fie $E^* = \{E_t \mid t \in I\} \subset E$ „îmbrăcînd" traiectoria $\{(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ şi admiţînd deplasări de tipul $\| x^* - \bar{x}(t) \| \leqslant \varepsilon_1$ şi $| t^* - t | \leqslant \varepsilon_2$ cu ε_1 şi ε_2 suficient de mici aleşi. În consecinţă, alegînd variaţiile $u_t(t)$ care definesc comanda variată $\bar{u}^*(t)$ de la 2.3.4 astfel încît $u_t(t) \in U_t$, lucru posibil deoarece U_t este o imagine printr-o funcţie continuă, iar ε suficient de mic astfel încît, conform teoremei de dependenţă a soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de un parametru, $\| \bar{x}^*(t) - \bar{x}(t) \|$ să fie suficient de mic ca $\bar{x}^*(t) \in D$, rezultă în definitiv că $\{(t, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)) \mid t \in I\} \subset E^*$, deci se află situată în întregime în E. Astfel proprietatea π este complet valabilă în cadrul restricţiilor de tip lagrangeean.

Cu precizările de pînă acum se poate aborda în acest stadiu în mod riguros, problema de tip Lagrange, pusă în evidenţă prin teorema care urmează :

TEOREMA 2. *Fie*

1) $A \subset R^1 \times R^n \times R^r$ *deschisă*;

2) $\varphi : A \to R^p$ cu $\varphi \in C^1(A)$,

unde

$$\varphi(t, x, u) = (\varphi^1(t, x, u), \ldots, \varphi^p(t, x, u));$$

3) $E = \{(t, x, u) \mid \varphi(t, x, u) = 0\} \neq \emptyset$,

definind mulțimea restricțiilor de tip lagrangeean ;

4) $\partial_u \varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial u^r} \\ \frac{\partial \varphi^p}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^p}{\partial u^r} \end{bmatrix}$, cu rangul p în E;

5) $f^0, f^1, \ldots, f^n : A \to R^1$,
în $C^1(A)$, *nefiind obligatorie derivabilitatea în raport cu* u *decît într-un singur caz, care va fi precizat, și definind conducerea în* A *prin*

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = f^i(t, x, u), \; i = 1, \ldots, n$$

sau vectorial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x, u),$$

unde $f = (f^1, \ldots, f^n)$;

6) (t_0, x_0), $(t_1, x_1) \in E$. *Conform corolarului fundamental al propoziției 1 din acest paragraf, are sens să presupunem cel puțin local existența unei traiectorii* :

$$\{(t, x(t), u(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\} \subset E,$$

cu extremele impuse cel puțin local, adică într-o vecinătate a lui (t_0, x_0) ;

7) $\{(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$ *o traiectorie optimală, care face minimă pe mulțimea comenzilor strict admisibile* $\Sigma(E, x_0, x_1, t_0, t_1)$ *funcționala*

$$J(u) = \int_I f^0(t, x(t), u(t))\, \mathrm{d}t.$$

Atunci este valabil principiul maximului, care se enunță astfel :

1. *Există* $\bar{\lambda} : I \to R^p$ *cu* $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p)$ *continuă pe toate intervalele de continuitate ale lui* $\bar{u}$, *nebanală, definind multiplicatorii lui Lagrange, și* $\hat{\bar{\psi}} : I \to R^{n+1}$ *neidentic nulă, astfel încît, introducînd*

$$\mathcal{H}(\hat{\psi}, \lambda, t, x, u) = \langle \hat{\psi}, f(t, x, u) \rangle + \langle \lambda, \varphi(t, x, u) \rangle =$$
$$= \psi_0 f^0(t, x, u) + \psi_1 f^1(t, x, u) + \cdots +$$
$$+ \psi_n f^n(t, x, u) + \lambda_1 \varphi^1(t, x, u) + \cdots + \lambda_p \varphi^p(t, x, u),$$

Scanned with OKEN Scanner

avem

2. $$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\bar{x}}}{dt} = \mathcal{H}_{\hat{\psi}}(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{\lambda}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)); \\ \dfrac{d\hat{\bar{\psi}}}{dt} = -\mathcal{H}_{\hat{x}}(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{\lambda}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)); \\ \mathcal{H}_u(\hat{\bar{\psi}}(t), \lambda(t)\ t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0. \end{cases}$$

3. *Pentru orice* $(t, \bar{x}(t), u) \in E$, $t \in [t_0, t_1]$:

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), \lambda(t), t, \bar{x}(t), u) \leqslant \mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{\lambda}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

4. $$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{\lambda}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathcal{H}_t(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{\lambda}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

pe orice interval de continuitate a lui $\bar{u}$.

Demonstrație. Fie $v: G \to R^r$ cu $v \in C^1(G)$, conform propozițiilor 1 și 2 și lemei din cadrul acestui paragraf ($E \subset G$, G deschisă). Fie în consecință

$$\tilde{\hat{f}} : G \to R^{n+1},$$

definită prin

$$\tilde{\hat{f}}(t, x, u) = \hat{f}(t, x, v(t, x, u)),$$

unde, evident

$$\tilde{\hat{f}}|_E = \hat{f}|_E,$$

datorită proprietății funcției v.

Să introducem

$\tilde{\Sigma}(G, x_0, x_1, t_0, t_1) = \{\tilde{u} : I \to R^r \mid$ continue pe porțiuni, cauzînd traiectoriile descrise de $\dfrac{dx}{dt} = \tilde{f}(t, x, \tilde{u}(t))$, cu extremele în $(t_0, x(t_0) = x_0)$, $(t, x\ (t_1) = x_1)$, $\{(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \mid t \in I\} \subset G\}$. Astfel intro-

dusă $\tilde{\Sigma}$ nu este vidă, căci

$$\tilde{\Sigma}(G,\ x_0,\ x_1,\ t_0,\ t_1) \supset \Sigma.\ (E,\ x_0,\ x_1,\ t_0,\ t_1).$$

Într-adevăr, fie $u \in \Sigma\ (E,\ x_0,\ x_1,\ t_0,\ t_1)$, implicînd

$$\{(t,\ x(t),\ u(t)) \mid t \in I\} \subset E \subset G,$$

și, deoarece $v(t,\ x\ (t),\ u(t)) = u(t)$, rezultă imediat că

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,\ x(t),\ u\ (t)) = f(t,\ x(t),\ v(t,\ x(t),\ u(t))) =$$

$$= \tilde{f}(t,\ x(t),\ u(t)).$$

În fine, să arătăm că $\bar{u}$ minimizează în $\tilde{\Sigma}(G,\ x_0,\ x_1,\ t_0,\ t_1)$ funcționala

$$\tilde{J}(\tilde{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\tilde{f}}^0(t,\ x,\ \tilde{u})\ \mathrm{d}t.$$

Să presupunem contrarul. Fie în consecință $\tilde{u}_* \in \Sigma(G,\ x_0,\ x_1,\ t_0,\ t_1)$, cauzînd traiectoria $\tilde{x}_*(t)$, astfel încît

$$\tilde{J}(\tilde{u}_*) < \tilde{J}(\bar{u}) = J\ (\bar{u}).$$

Fie

$$u_{**}(t) = v(t,\ \tilde{x}_*(t),\ \tilde{u}_*(t));$$

atunci

$$\{(t,\ \tilde{x}_*(t),\ v(t,\ \tilde{x}_*(t),\ \tilde{u}_*(t))) \mid t \in I\} \subset E \to \{(t,\ \tilde{x}_*(t),\ u_{**}(t)) \mid t \in I\} \subset E,$$

iar

$$\frac{\mathrm{d}\,\tilde{x}_*}{\mathrm{d}t} = \tilde{f}(t,\ x_*(t),\ \tilde{u}_*(t)) = f(t,\ \tilde{x}_*(t),\ v(t,\ \tilde{x}_*(t),\ \tilde{u}_*(t))) =$$

$$= f(t,\ \tilde{x}_*(t),\ u_{**}(t))$$

şi deci

$$u_{**} \in \Sigma(E, x_0, x_1, t_0, t_1);$$

rezultă

$$J(u_{**}) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, \tilde{x}_*(t), u_{**}(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{f}^0(t, \tilde{x}_*(t), \tilde{u}_*(t))\, dt < J(\tilde{u}),$$

ceea ce este absurd. Deci $\bar{u}$ minimizează $\tilde{J}$ în $\tilde{\Sigma}(G, x_0, x_1, t_0, t_1)$.

Fie în consecinţă

$$\tilde{\mathcal{H}}(\hat{\psi}, t, x, u) = < \hat{\psi}, \tilde{\tilde{f}}(t, x, u) > .$$

Atunci, conform principiului maximului enunţat la 2.3.5, există o soluţie nebanală $\hat{\bar{\psi}}$ a sistemului :

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = -\tilde{\mathcal{H}}_{\hat{x}}(\hat{\psi}, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

astfel încît

$$1)\ \tilde{\mathcal{H}}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), u) \leqslant \tilde{\mathcal{H}}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),\ t \in I,$$

$$(t, \bar{x}(t), u) \in G;$$

$$2)\ \frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{H}}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \tilde{\mathcal{H}}_t(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

pe orice interval de continuitate a lui $\bar{u}$, iar $\bar{\psi}_0 = \text{const} \leqslant 0$.

Fie acum

$$\mathcal{H}_*(\hat{\psi}, t, x, u) = < \hat{\psi}, \hat{f}(t, x, u) > .$$

Atunci, datorită faptului că

$$\tilde{\tilde{f}}|_E = \hat{f}|_E,$$

avem

$$1)\ \mathcal{H}_*(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), u) \leqslant \mathcal{H}_*(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),\ t \in I$$

$$\text{şi}\ (t, \bar{x}(t), u) \in E,\ \text{iar}$$

$$\frac{d\hat{\bar{\psi}}}{dt} = -\mathcal{H}_{*\hat{x}}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t));$$

$$2)\ \frac{d}{dt}\mathcal{H}_*(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathcal{H}_{*t}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

pe orice interval de continuitate a lui $\bar{u}$.

Conform teoremei 1, există $\bar{\lambda}: I \to R^p$ unic definită, continuă pe orice interval de continuitate a lui $\bar{u}$, astfel încît, introducînd

$$\mathcal{H}(\hat{\psi}, \lambda, t, x, u) = \mathcal{H}_*(\hat{\psi}, t, x, u) + <\lambda, \varphi(t, x, u)>,$$

datorită proprietăţii 1) scrisă imediat mai sus, avem,

$$\mathcal{H}_u(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{\lambda}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0,$$

iar

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\hat{x}}(\hat{\psi}, t, x, u) = \mathcal{H}_{\hat{x}}(\hat{\psi}, t, x, u) + \mathcal{H}_u(\hat{\psi}, t, x, u)\, v_x(t, x, u)$$

şi în consecinţă, conform relaţiei de mai sus

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\hat{x}}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}, (t), \bar{u}(t)) = \mathcal{H}_{\hat{x}}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = -\frac{d\hat{\bar{\psi}}(t)}{dt}$$

şi

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), u) \leqslant \mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), t \in I, (t, \bar{x}(t), u) \in E.$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathcal{H}\left(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) = \mathcal{H}_t\left(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t),\right.$$

astfel teorema este complet demonstrată. Se vede imediat că derivabilitatea în raport cu u a tost cerută de $\mathcal{H}_u = 0$.

Vom termina acest paragraf prin :

Teorema lui Lagrange. Fie :

1) $A \subset R^n$ *deschisă* ;

2) $f, g^1, \ldots, g^p : A \to R^1$ *cu derivate parţiale continue în* A ;

3) $E = \{x \in A \mid g^i(x) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant p\} \neq \varnothing$;

4) $$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial g^1}{\partial x^n} \\ \\ \dfrac{\partial g^p}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial g^p}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$ *cu rangul* p *în* E ;

5) $F : A \times R^p \to R^1$

prin *egalitatea*

$$F(x,\lambda) = f(x) + < \lambda, g(x) >,$$

unde

$$g = (g^1, \ldots, g^p),\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) ;$$

6) $\bar{x} \in E$ *minimul lui* f *în* E :

$$f(\bar{x}) \leqslant f(x)$$

pentru orice $x \in E$.

Atunci *există* $\bar{\lambda} \in R^p$ *unic, astfel încît*

$$\nabla F(\bar{x}) = 0.$$

Demonstraţie : Fie

$$Q = \{y = (y^0,\ y^1, \ldots, y^p) \in R^{p+1} \mid y^0 = f(x),\ y^1 =$$

$$= g^1(x), \ldots, y^p = g^p(x),\ x \in A\}.$$

Atunci punctul

$$\bar{y} = (f(\bar{x}),\ 0,\ \ldots,\ 0) \in Q$$

este un punct extrem al mulţimii Q în raport cu prima coordonată, ceea ce este evident.

Fie translatul lui R^{p+1} în $\bar{y}$, introducînd coordonatele η^0, $\eta^1, \ldots, \eta^p$ referitoare la acest punct considerat ca origine, şi fie de asemenea

$$Q_{\bar{x}} = \{\eta = (\eta^0,\ \eta^1, \ldots, \eta^p) \mid \eta^0 = < \nabla f(\bar{x}),\ \xi >,\ \eta^i = < \nabla g^i(x),$$

$$\xi >,\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ \xi \in R^n\}.$$

Atunci $Q_{\bar{x}}$ este o mulţime derivată a lui Q referitoare la $\bar{y}$. Într-adevăr, să definim $Q_{\bar{x}}$ prin transformarea

$$\eta = A_{\bar{x}}\ \xi,$$

unde, evident,

$$A_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \nabla^T f(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla^T g^p(x) \end{bmatrix}.$$

Fie

$\eta_1, \ldots, \eta_m \in Q_{\bar{x}}$, definite respectiv prin

$$\eta_j = A_{\bar{x}}\ \xi_j,\ j = 1,\ \ldots,\ m;$$

$$\sum_{j=1}^{m} \delta\tau^j \eta_j = \sum_{j=1}^{m} \delta\tau^j A_{\bar{x}}\ \xi_j = \sum_{j=1}^{m} A_{\bar{x}} \delta\tau^j \xi_j = A_{\bar{x}} \sum_{j=1}^{m} \delta\tau^j \xi_j = A_{\bar{x}} \xi,$$

unde

$$\bar{\xi} = \sum_{j=1}^{m} \delta\tau^j \xi_j.$$

Fie $\rho > 0$ suficient de mic ca $V_\rho(\bar{x}) \subset A$. Atunci

$$f(x) = f(\bar{x}) + < x - \bar{x}, \nabla f(x_*) >;$$

$$g^i(x) = g(\bar{x}) + < x - \bar{x}, \nabla g^i(x_{*i}) >,$$

unde x_*, x_{*i} sînt, respectiv, pe segmentul $[\bar{x}, x]$ în $V_\rho(\bar{x})$, conform teoremei creşterilor finite, sau, în definitiv,

$$f(x) = \bar{y}^0 + < x - \bar{x}, \nabla f(x_*) >;$$

$$g^i(x) = < x - \bar{x}, \nabla g^i(x_{*i}) >, 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Fie $M > 0$ şi $\varepsilon_0 > 0$ suficient de mic, astfel încît

$$x = \bar{x} + \varepsilon \xi \in V_\rho(\bar{x})$$

pentru orice

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \text{ şi } \delta\tau = (\delta\tau^1, \ldots, \delta\tau^m) \in [0, M] \times \cdots \times [0, M].$$

Rezultă că

$$f(x) = \bar{y}^0 + \varepsilon < \xi, \nabla f(x_*) >;$$

$$g^i(x) = \varepsilon < \xi, \nabla g^i(x_{*i}) >, 1 \leqslant i \leqslant p,$$

care, evident, se pot scrie

$$f(x) = \bar{y}^0 + \varepsilon < \xi, \nabla f(\bar{x}) > + 0^0(\varepsilon);$$

$$g^i(x) = \varepsilon < \xi, \nabla g^i(\bar{x}) > + 0^i(\varepsilon), 1 \leqslant i \leqslant p,$$

sau

$$y = \bar{y} + \varepsilon A_{\bar{x}} \xi + 0(\varepsilon) \in Q,$$

unde

$$0(\varepsilon) = (0^0(\varepsilon), \ldots, 0^p(\varepsilon))$$

Scanned with OKEN Scanner

şi deci în definitiv

$$y = \bar{y} + \varepsilon\eta + 0(\varepsilon) \in Q,$$

unde

$$\eta = \sum_{j=1}^{m} \delta\tau^j \eta_j, \quad \delta\tau^j \geqslant 0,$$

generîndu-se în consecinţă un con de variaţie.

Conform teoremei fundamentale de la 2.2.3, există $\bar{\lambda}' \in R^{p+1}$, $\bar{\lambda}' \neq 0$ astfel încît pentru orice η din $Q_{\bar{x}}$

$$< \bar{\lambda}', \eta > \leqslant 0,$$

adică

$$< \bar{\lambda}', A_{\bar{x}}\, \xi > \leqslant 0,$$

sau

$$< A_{\bar{x}}^T \bar{\lambda}', \ \xi > \leqslant 0$$

pentru orice $\xi \in R^n$ şi, în consecinţă,

$$A_{\bar{x}}^T \ \bar{\lambda}' = 0.$$

Deci

$$\bar{\lambda}_0' \nabla f(\bar{x}) + \bar{\lambda}_1' \nabla g^1(\bar{x}) + \ldots + \bar{\lambda}_p' \nabla g^p(\bar{x}) = 0,$$
$$\bar{\lambda}_0 \neq 0,$$

căci în caz contrar $\nabla g^1(\bar{x}), \ldots, \nabla g^p(\bar{x})$ ar fi liniar dependenţi, ceea ce ar contrazice ipoteza 4).

Aşadar

$$\nabla f(\bar{x}) + \frac{\bar{\lambda}_1'}{\bar{\lambda}_0'} \nabla g^1(\bar{x}) + \ldots + \frac{\bar{\lambda}_p'}{\bar{\lambda}_0'} \nabla g^p(\bar{x}) = 0.$$

Notînd

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\bar{\lambda}_i'}{\bar{\lambda}_0'},$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă în definitiv

$$\nabla f(\bar{x}) + \bar{\lambda}_1 \nabla g^1(\bar{x}) + \cdots + \bar{\lambda}_p \nabla g^p(\bar{x}) = 0,$$

$\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p$ conform cu 4) fiind unici. Teorema este complet demonstrată.

2.3.8. PROBLEMA TIMPULUI FINAL NEIMPUS

Considerînd date punctele 1—7 de la 2.3.1, vom presupune ca singură deosebire că intervalul I este de forma $[t_0, \infty)$ şi vom defini analog :

1) $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x, u)$, obiectul condus :

2) $\Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0) = \{u : [t_0, \infty) \to U$ continue pe porţiuni, conduc obiectul din $x(t_0) = x_0$ în x_1, timpul final neinteresînd, traiectoria $x(t)$ fiind conţinută în întregime în $X\}$ — clasa comenzilor strict admisibile ;

3) $J : \Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0) \to R^1$, prin egalitatea

$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, (t), u(t))\, dt$, t_1 rezultînd, reprezentînd indicele de performanţă.

Problema conducerii optimale va consta în găsirea unei comenzi $\bar{u} \in \Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0)$ care să minimizeze indicele de performanţă :

$$J(\bar{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, dt = \inf \{J(u) \mid u \in \Sigma(X, U, x_0, x_1, t_0\},$$

t_1 rezultînd. Mulţimea comenzilor admisibile va fi
$\Sigma(X, U, x_0, t_0) = \{u : [t_0\ \infty) \to U \mid$ continue pe porţiuni, conduc obiectul din $x(t_0) = x_0$ oriunde, t_1, nefiind precizat, $x(t) \in X\}$.

Se constată imediat că interpretarea geometrică a optimalităţii rămîne aceeaşi.

De asmenea, $\hat{x}(\bar{t}_1)$ este un punct extrem în raport cu prima coordonată (x^0) a mulţimii :

$$\hat{A}(\Sigma(X, U, x_0, t_0)) = \left\{\hat{x}(t_1) \,\middle|\, \frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{f}(t, x, u), \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0, u \in \right.$$

$$\left. \in \Sigma(X, U, x_0, t_0)\right\}.$$

Se introduce pentru o traiectorie oarecare $\hat{x}(t)$ intervalul de conducere neimpus fiind, $[t_0, t_1]$ mulţimea

$$\hat{M}_*(\hat{x}(t_1)) = \{\hat{f}(t_1, x(t_1), u(t_1)), -\hat{f}(t_1, x(t_1), u(t_1))\} \cup \hat{M}(\hat{x}(t_1)),$$

unde $\hat{M}(\hat{x}(t_1))$ a fost definită la 2.3.4 Atunci

$\hat{M}_*(\hat{x}(t_1))$ este o mulţime derivată a lui $\hat{A}(\Sigma(X, U, x_0, t_0))$, făcînd apel în mod analog la proprietatea π, care în acest caz este uşor modificată.

Pentru demonstrarea afirmaţiei de mai sus se va construi o comandă variată u^* definită pe

$$[t_0, t_1 + \varepsilon\delta t],$$

unde

a) dacă $\delta t > 0$, proprietatea π va funcţiona în sensul că permite prelungirea prin continuitate a comenzii u din momentul t_1 pe o durată „scurtă" impusă prin mărimea lui ε;

b) dacă $\delta t < 0$, ε se va lua suficient de mic, ca

$$\tau_q + \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^q) < t_1 + \varepsilon\,\delta t.$$

Atunci

$$\hat{x}^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = \hat{x}^*(t_1) + \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon\delta t} \hat{f}(t, x^*(t), u^*(t))\,dt \in \hat{A}(\Sigma(X, U, x_0, t_0)).$$

S-a demonstrat la 2.3.4 că

$$\hat{x}^*(t_1) = \hat{x}(t_1) + \varepsilon \sum_{i=1}^{q} \delta\tau^i (\hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), v_i) - \hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), u(\tau_i))) + 0(\varepsilon)'$$

iar aplicînd teorema de medie

$$\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon\delta t} \hat{f}(t, x^*(t), u^*(t))\,dt = \varepsilon\delta t\hat{f}(t_1, x(t_1), u(t_1)) + 0(\varepsilon)$$

sau

$$\hat{x}^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = \hat{x}(t_1) + \varepsilon\left(\delta t \hat{f}(t_1, x(t_1), u(t_1)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{q} \delta\tau^i(\hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), v_i) - \hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), u(\tau_i)))\right] + 0(\varepsilon).$$

Totdeauna însă

$$\delta t = \delta t' - \delta t'' \text{ cu } \delta t', \delta t'' \geqslant 0,$$

aşa că în definitiv

$$\hat{x}^*(t_1 + \varepsilon\delta t) = \hat{x}(t_1) +$$

$$+ \varepsilon\left[\hat{f}(t_1, x(t_1), u(t_1))\delta t' + (-\hat{f}(t_1, x(t_1), u(t_1))\delta t'' + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{q} \delta\tau^i(\hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), v_i) - \hat{F}(\tau_i, x(\tau_i), u(\tau_i)))\right] + 0(\varepsilon).$$

Repetînd raţionamentul de la finele demonstraţiei propoziţiei 1 de la 2.3.4, cu precizarea că parametrul ρ este $q + 2$ — dimensional:

$$\rho = (\varepsilon\delta t', \varepsilon\delta t'', \varepsilon\delta\tau^1, \ldots, \varepsilon\delta\tau^q),$$

rezultă în definitiv că $\hat{M}_*(\hat{x}(t_1))$ este o mulţime derivată. Aplicînd acum teorema fundamentală de la 2.2.3, rezultă că există $\hat{\lambda} \neq 0$

astfel încît pentru orice $\hat{\xi} \in \hat{M}_*(\hat{\bar{x}}(t_1))$, $\hat{\bar{x}}(\bar{t}_1)$, punctul final al traiectoriei optimale, să avem

$$< \hat{\lambda}, \hat{\xi} > \leqslant 0$$

$\hat{\lambda}$ fiind de fapt normala la hiperplanul de separaţie orientată convenabil. De remarcat că pentru $\hat{f}(\bar{t}_1, x(\bar{t}_1), \bar{u}(t_1)), -\hat{f}(\bar{t}_1, \bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1)) \in \hat{M}_*(\hat{\bar{x}}(\bar{t}_1))$

avem

$$< \hat{\lambda},\ \hat{f}(\bar{t}_1,\ \bar{x}(\bar{t}_1)\ \bar{u}(\bar{t}_1)) > \leqslant 0,$$

$$< \hat{\lambda},\ -\hat{f}\,(\bar{t}_1,\ \bar{x}(\bar{t}_1)\ \bar{u}(\bar{t}_1)) > \leqslant 0,$$

de unde

$$< \hat{\lambda}, \hat{f}\,(\bar{t}_1,\ \bar{x}(\bar{t}_1),\ \bar{u}(\bar{t}_1)) > = 0.$$

Cunoscînd că

$$\hat{\bar{\psi}}\,(\bar{t}_1) = \hat{\lambda},$$

rezultă

$$< \hat{\bar{\psi}}\,(\bar{t}_1), \hat{f}(\bar{t}_1, \bar{x}(\bar{t}_1), \bar{u}(\bar{t}_1)) > = 0,$$

adică în punctul final cu timp liber principiul maximului devine

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(\bar{t}_1),\ \bar{t}_1,\ \bar{x}(\bar{t}_1),\ \bar{u}\,(\bar{t}_1)) = \mathfrak{M}\,(\hat{\bar{\psi}}(\bar{t}_1),\ \bar{t}_1, \bar{x}\,(\bar{t}_1)) = 0.$$

În concluzie, din proprietatea 2) a enunţării principiului maximului de la 2.3.5 rezultă

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}\,(t),\ \bar{u}\,(t)) = \mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(\bar{t}_1),\ \bar{t}_1,\ \bar{x}\,(\bar{t}_1),\ \bar{u}\,(\bar{t}_1)) +$$

$$+ \int_{\bar{t}_1}^{t} \frac{\partial \mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}\,(\tau),\ \tau,\ \bar{x}(\tau),\ \bar{u}(\tau))}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau.$$

Dar

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f^k}{\partial t}\,\psi_k,$$

aşa că principiul maximului se va scrie în definitiv

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)) = \mathfrak{M}\,(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t)) =$$

$$= \int_{\bar{t}_1}^{t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f^k\,(\tau,\ \bar{x}(\tau),\ \bar{u}(\tau))}{\partial t}\,\bar{\psi}_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

iar în cazul sistemelor autonome

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathcal{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), \bar{x}(t)) = 0, \ t \in [t_0, \bar{t}_1].$$

2.4. PRINCIPIUL MAXIMULUI PENTRU EXTREME MOBILE

2.4.1. FORMULAREA PROBLEMEI

Spre deosebire de 2.3.1, se consideră

1) $X = R^n$;

2) t_1, timpul final neimpus,

iar punctul final x_1 va fi plasat pe o varietate a spațiului X care se modifică continuu în timp și care posedă unele proprietăți de analiticitate care vor fi expuse în cele ce urmează.

Fie

$$g^1, \ldots, g^{n-r}: \ R^1 \times R^n = R^1 \times X = X^* \to R^1,$$

$(n-r)$ funcții de variabilele $t, x^1, \ldots, x^n$ continue, cu derivate parțiale continue în raport cu toate variabilele menționate, și fie de asemenea

$$S^{1*} = \{(t, x) \mid g^1(t, x) = 0\},$$

. . . . . .

$$S^{(n-r)*} = \{(t, x) \mid g^{n-r}(t, x) = 0\},$$

unde se presupune că $S^{1*}, \ldots, S^{(n-r)*}$ există pentru orice $t \in R^1$.

Vom considera că gradienții:

1) $\nabla_{(t,x)} g^1, \ldots, \nabla_{(t,x)} g^{n-r}$ nu se anulează respectiv în nici un punct (t, x) al suprafețelor $S^{1*}, \ldots, S^{(n-r)*}$;

2) $S_1^* = S^{1*} \cap \ldots \cap S^{(n-r)*} \neq \Phi$;

3) pentru orice $(t, x) \in S_1^*$, vectorii

$$\nabla_{(t,x)} g^1(t, x), \ldots, \nabla_{(t,x)} g^{(n-r)}(t, x)$$

sînt liniari independenţi, adică matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g^1(t,x)}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial g^{n-r}(t,x)}{\partial t} \\ \frac{\partial g^1(t,x)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^{n-r}(t,x)}{\partial x^1} \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{\partial g^1(t,x)}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial g^{n-r}(t,x)}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

are rangul $n-r$ reamintind că fiecare coloană a matricei de mai sus corespunde componentelor fiecărui gradient $\nabla_{(t,x)} g^i$, $i = 1, \ldots, n-r$. Mulţimea S_1^* definită de 2) cu proprietăţile 1) şi 3), poartă numele de varietate netedă $r+1$ — dimensională a spaţiului $X^* = R^{n+1}$.

În cele relatate mai sus, variabila temporară t a intervenit ca simplă coordonată, cu precizarea că $g^1, \ldots, g^{n-r}$ se anulează în raport cu x pentru orice t.

Dacă acum t ia o valoare precizată t_* vom nota

$$S^1(t_*) = \{x \mid g^1(t_*, x) = 0\},$$

$$S^{n-r}(t_*) = \{x \mid g^{n-r}(t_*, x) = 0\},$$

definindu-se $n-r$ hipersuprafeţe în $X = R^n$.

Atunci se constată imediat, pe baza proprietăţilor 1), 2), 3), că

$$S_1(t_*) = S^1(t_*) \cap \cdots \cap S^{n-r}(t_*)$$

este o varietate netedă r — dimensională în $R^n = X$.

Considerînd acum t ca parametru, se obţine o varietate netedă $S_1(t)$ mobilă, de dimensiune r, considerată în spaţiul X. La nivelul spaţiului X^*, S_1^* este o varietate netedă fixă $r+1$ dimensională, fiecare varietate $S_1(t)$ obţinîndu-se prin intersecţia lui S_1^* cu un hiperplan ce trece prin $(t,0)$ şi este perpendicular pe axa t.

Pe baza celor de mai sus rezultă imediat că orice varietate netedă $r+1$ dimensională din X^* (sau r — dimensională în X) admite

în fiecare punct al său un plan tangent de dimensiune $r+1$ (sau r în X).
Într-adevăr, fie

$$(t, x) \in S_1^*.$$

Atunci $(t, x) \in S^{i*}$, $i = 1, \ldots, n-r$ şi, cum $\nabla_{(t,x)} g^i(t, x) \neq 0$, ecuaţia hiperplanului tangent $T^{i*}(t, x)$ la hipersuprafaţa S^{i*} este

$$< \nabla_{(t,x)} g^i(t, x), \ \xi^* > = 0,$$

unde ξ^* are originea în (t, x).
Atunci sistemul

$$< \nabla_{(t,x)} g^1(t, x), \xi^* > = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$< \nabla_{(t,x)} g^{n-r}(t, x), \xi^* > = 0$$

este compatibil depinzînd de $r+1$ parametri şi localizînd, în consecinţă, pe ξ^* într-un plan de dimensiune $(r+1)$, $T^*(t, x)$, unde

$$T^*(t, x) = \bigcap_{i=1}^{n-r} T^{i*}(t, x)$$

şi unde $T^*(t, x)$ este, după cum uşor se poate verifica, un plan tangent. Se vede de asemenea că normala la $T^*(t, x)$ are o variaţie continuă în raport cu (t, x).
Se poate acum enunţa problema de optim. Dîndu-se

1) $U \subset R^r$;

2) $x_0 \in X$, $t_0 \in R^1$;

3) $f^0, f^1, \ldots, f^n : X^* \times U \to R^1$ continue în (t, x, u) pe $X^* \times U$ şi cu derivate parţiale în raport cu t şi x continue în (t, x, u);

4) $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x, u)$ cu $f = (f^1, \ldots, f^n)$, definind procesul de conducere;

5) indicele de performanţă integral

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\,dt \quad (t_1 - \text{liber});$$

6) o varietate netedă mobilă, $S_1(t) \subset X$;

se cere: să se găsească în mulţimea comenzilor strict admisibile: $\Sigma(U, x_0, t_0, S_1^*) = \{u : [t_0\ \infty) \to U \mid$ continue pe porţiuni, conducînd sistemul din $x(t_0) = x_0$ pe $S_1(t_1)$ unde t_1, rezultă ca moment al intersecţiei traiectoriei cu varietatea mobilă$\}$, o comandă $\bar{u}$ — optimală astfel încît:

$$J(\bar{u}) = \int_{t_0}^{\bar{t}_1} f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,dt$$

să fie valoarea minimă a funcţionalei $J(u)$, adică

$$J(\bar{u}) = \min\{J(u) \mid u \in \Sigma(U, x_0, t_0, S_1^*)\},$$

şi unde $\bar{x}(t)$ este traiectoria optimală cauzată de comanda optimală, iar $\bar{t}_1$ momentul intersecţiei traiectoriei optimale cu varietatea mobilă. Reamintim că prin S_1^* am notat varietatea netedă fixă din X^*, care la nivelul lui X generează familia de varietăţi $S_1(t)$.

2.4.2. MODIFICAREA PROBLEMEI

Cu toate că problema timpului liber a fost abordată chiar în cazul neautonom, este necesară o reductibilitate a problemei de la 2.4.1 la o problemă autonomă, dificultăţile care reclamă acest lucru provenind de la faptul că $S_1(t)$ este mobilă în raport cu timpul, pe cînd la nivelul lui X^*, S_1^*, este fixă.

Notînd coordonata t a lui X^* cu x^{n+1}, sistemul de ecuaţii diferenţiale se poate scrie

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1,\ x^{n+1}(t_0) = t_0,$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u),\ x(t_0) = x_0$$

sau

$$\frac{dx^*}{dt} = f^*(x^*, u),$$

unde

$$x^* = (x^{n+1}, x^1, \ldots, x^n),$$

$$f^* = (1, f),$$

iar condiția inițială

$$x^*(t_0) = (t_0, x_0) = x_0^*.$$

Atunci problema optimalității transpusă în X revine la găsirea unei comenzi $\bar{u} \in \Sigma(U, x_0, t_0, S_1^*)$ astfel încît traiectoria care unește x_0^* cu S_1^*, varietatea netedă $r+1$ dimensională fixă din X^*, să fie optimală, adică să minimizeze funcționala J, care în cazul de față devine

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x^*, u)\, dt,\ t_1 \text{ rezultînd.}$$

Introducem acum și coordonata x^0 corespunzătoare indicelui de performanță, astfel încît spațiul X^* capătă o extensiune dimensională în plus, devenind $\hat{X}^*$, și unde

$$\hat{X}^* \ni \hat{x}^* = (x^0, x^{n+1}, x^1, \ldots, x^n),$$

iar procesul de conducere este descris de

$$\frac{d\hat{x}^*}{dt} = \hat{f}^*(x^*, u),\ \hat{f}^* = (f^0, 1, f) = (f^0, f^*).$$

Se poate da acum o formulare finală a problemei de optimalitate în felul următor. Să se găsească $\bar{u} \in \Sigma(U, x_0, t_0, S_1^*)$ astfel

încît traiectoria $\hat{\bar{x}}^*(t) = (\bar{x}^0(t), \bar{x}^*(t))$ cauzată de această comandă și inițializată în $(0, x_0^*) = \hat{x}_0^*$ să aibă proprietatea

$$\bar{x}^0(\bar{t}_1) = \inf. \{x^0(t_1) \mid x^*(t_1) \in S_1^*, t_1 \text{ liber}\},$$

adică

$$\bar{x}^0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(\bar{x}^*(t), \bar{u}(t))\, dt$$

este valoarea minimă a indicelui de performanță, iar punctul final al traiectoriei $x^*(t)$ din X^* să se găsească pe varietatea finală fixă S_1^*.

Fie atunci, analog ca la 2.3.8, mulțimea

$$\hat{A}^*(\Sigma(U, x_0, t_0, S_1^*)) = \{\hat{x}^*(t_1) \mid \frac{d\hat{x}^*}{dt} = \hat{f}^*(x^*, u), \hat{x}^*(t_0) = \hat{x}_0^*,$$

$$u \in \Sigma(U, x_0, t_0, S_1^*)\}.$$

Atunci se vede imediat că $\hat{\bar{x}}^*(t_1)$ este un punct extrem în raport cu prima coordonată a mulțimii $\hat{A}^*(\Sigma(U, x_0, t_0, S_1^*))$ referitor la varietatea netedă S_1^*.

2.4.3. CONDIȚIILE DE TRANSVERSALITATE

S-a demonstrat la 2.3.8 că $\hat{M}_*(\hat{\bar{x}}(\bar{t}_1))$ este o mulțime derivată. Se va introduce analog, la nivelul lui $\hat{X}^*$ însă, mulțimea $\hat{M}_*^*(\hat{\bar{x}}^*(\bar{t}_1))$, care, evident, va fi de asemenea o mulțime derivată.

Aplicînd în acest caz teorema extinsă de separabilitate nr. 2 de la 2.2.5, va rezulta pe lîngă consecința imediată a separabilității, care este principiul maximului în forma corespunzătoare sistemelor autonome de la finele lui 2.3.8, și condițiile de transversalitate.

Astfel vom avea:

a) pentru principiul maximului:

$$\mathcal{H}^*(\hat{\bar{\psi}}^*(t), \bar{x}^*(t), \bar{u}(t)) = \mathfrak{M}^*(\hat{\bar{\psi}}^*(t), \bar{x}^*(t)) = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\hat{\psi}^* = (\psi_0, \psi_{n+1}, \psi),$$

$$\mathcal{H}^*(\hat{\psi}^*, x^*, u) = \mathcal{H}(\hat{\psi}, t, x, u) + \psi_{n+1} \cdot 1,$$

rezultînd imediat

$$\mathfrak{M}^*(\hat{\psi}^*, x^*) = \mathfrak{M}(\hat{\psi}, t, x) + \psi_{n+1} 1;$$

b) pentru condiţiile de transversalitate :

$$< \psi^*(\bar{t}_1),\ p^* > = 0$$

pentru orice p^* din planul tangent T_1^* la varietatea S_1^* în punctul $\bar{x}^*(\bar{t}_1)$.

Produsul scalar poate fi scris

$$< \bar{\psi}(\bar{t}_1), p > + \bar{\psi}_{n+1}(\bar{t}_1)\, p_{n+1} = 0,$$

unde

$$p^* = (p_{n+1}, p) \in T_1^*.$$

Deoarece S_1^* este o varietate netedă $r + 1$ dimensională, planul tangent T_1^* în $\bar{x}^*(\bar{t}_1)$ este $r + 1$ dimensional, în timp ce planul tangent T_1 la $S_1(\bar{t}_1)$ este r dimensional. Atunci vectorii tangenţi p^* vor fi de două categorii :

— $(0,p)$, adică de fapt r dimensionali şi deci p aparţinînd planului T_1 ;

— $(p_{n+1} \neq 0, p)$ sau, echivalent, $(1,p)$, adică vectorii tangenţi în general.

Pentru cei din prima categorie rezultă

$$< \bar{\psi}(\bar{t}_1), p > = 0, p \in T_1,$$

iar pentru cei din cea de-a doua categorie

$$< \bar{\psi}(\bar{t}_1), p > + \bar{\psi}_{n+1}(\bar{t}_1) = 0, \quad (1, p) \in T_1^*,$$

nefiind obligatoriu ca $p \in T_1$.

Din ultima relaţie rezultă

$$\bar{\psi}_{n+1}(t) = \bar{\psi}_{n+1}(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^{t} \frac{d\bar{\psi}_{n+1}(\tau)}{dt}\, d\tau = - < \bar{\psi}(t_1), p > -$$

$$- \int_{\bar{t}_1}^{t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f^k(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))}{\partial t}\, d\tau,$$

unde s-a explicitat $\frac{d\psi_{n+1}}{dt}$.

Va rezulta atunci din egalitatea $\mathcal{H}^* = \mathcal{M}^*$, scrisă de-a lungul traiectoriei optimale

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathcal{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t)) = - \bar{\psi}_{n+1}(t),$$

unde $\bar{\psi}_{n+1}(t)$ are expresia de mai sus. Atunci principiul maximului se enunţă astfel: De-a lungul unei traiectorii optimale este valabilă relaţia

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathcal{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t)) =$$

$$= < \bar{\psi}(\bar{t}_1), p > + \int_{\bar{t}_1}^{t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f^k(\tau, \bar{t}(\tau), \bar{u}(\tau))}{\partial t}\, d\tau$$

pentru orice $t \in [t_0, \bar{t}_1]$ şi $(1, p) \in T_1^*$, împreună cu condiţiile de transversalitate

$$< \bar{\psi}(\bar{t}_1), p > = 0$$

pentru orice $p \in T_1$, iar $\bar{\psi}_0 = \text{ct} \leqslant 0$.

De asemenea $(1, p) \in T_1^*$ nu implică $p \in T_1$.

Cazuri particulare. a) *Problema timpului fix.* Este vorba de faptul că $S_1^* = \{(T, x) \mid x \in X = R^n\}$, adică punctul final nu este precizat în X, ci numai durata procesului de conducere. Atunci

$$< \bar{\psi}^*(T), p^* > = 0,$$

dar p^* nu poate fi decît de forma $(0, p)$ cu $p \in X$, adică

$$< \bar{\psi}(T), p > = 0$$

pentru orice $p \in X$, rezultînd că $\bar{\psi}(T) \perp X$ cu $\bar{\psi}(T) \in X$, adică

$$\bar{\psi}(T) = 0.$$

Deoarece teorema de separaţie funcţionează în permanenţă, adică normala la hiperplanul de separaţie $\hat{\bar{\psi}}(T) \neq 0$, rezultă neapărat că $\bar{\psi}_0 < 0$ (şi nu $= 0$), fiind ales egal cu -1. Aşadar, de-a lungul traiectoriei optimale vom avea

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathfrak{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t)), \; t \in [t_0, T]$$

şi

$$\hat{\bar{\psi}}(T) = (-1, 0, \ldots, 0).$$

b. *Problema interceptiei optimale.* Varietatea finală în X, $S_1(t)$ este un mobil care descrie o traiectorie $y(t)$, viteza la traiectorie fiind, evident,

$$\frac{dy}{dt} = (q^1, \ldots, q^n) = q(t).$$

În X^* varietatea fixă este de forma

$$S_1^* = \{t, y(t)) \mid t \in R^1\}$$

şi deci orice vector tangent este de forma

$$(1, q^1, \ldots, q^n) = (1, q).$$

Condiţiile de transversalitate la momentul „interceptiei" $\bar{t}_1$ se scriu

$$< \bar{\psi}(\bar{t}_1), q > + \bar{\psi}_{n+1}(\bar{t}_1) = 0$$

sau

$$\bar{\psi}_{n+1}(\bar{t}_1) = - < \bar{\psi}(\bar{t}_1), q >.$$

Atunci

$$\bar{\psi}_{n+1}(t) = - < \bar{\psi}(\bar{t}_1), q > - \int_{\bar{t}_1}^{t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f^k(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)}{\partial t} \, d\tau$$

şi deci în final principiul maximului este

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathfrak{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t)) =$$

$$= < \bar{\psi}(\bar{t}_1), q > + \int_{\bar{t}_1}^{t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f^k(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))}{\partial t} \, d\tau$$

şi

$$\bar{\psi}_0 = \text{ct} \leqslant 0.$$

Observaţie. Dacă $S_1^* = \{(t, x_1) \mid t \in R^1\}$, evident că aceasta reprezintă problema timpului neimpus, tratată în 2.3.8, şi în care caz $q = 0$, adică se regăseşte (nu se redemonstrează însă) că

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathfrak{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t)) = \int_{\bar{t}_1}^{t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f^k(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))}{\partial t} \, d\tau$$

şi

$$\bar{\psi}_0 = \text{ct} \leqslant 0.$$

2.5. PRINCIPIUL MAXIMULUI PENTRU CONDIŢII RESTRICTIVE DE TIP INEGALITATE

2.5.1. CONDIŢII IZOPERIMETRICE DE TIP INEGALITATE

La 2.3.6 am tratat cazul restricţiilor izoperimetrice de tip egalitate şi am văzut reductibilitatea acestui caz la o problemă cu extreme fixe : $\hat{x}(t_0)$, $\hat{x}(t_1)$, t_0, t_1 fiind daţi. Menţionăm că problema nefixării lui t_1 se tratează imediat cu ajutorul rezultatelor de la 2.3.8.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul restricțiilor de tip inegalitate, vom avea

$$\int_I g^i(t, x(t), u(t))\, dt \geqslant a^i,\ 1 \leqslant i \leqslant p,$$

unde $g^i : R^1 \times R^n \times U \to R^1$ de același tip cu funcțiile f^i.

Introducînd extensiunea cunoscută, rezultă că

$$\frac{d\hat{\hat{x}}}{dt} = \hat{\hat{f}}(t, x, u),$$

$$\hat{\hat{x}}(t_0) = (0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, x_0^1, \ldots, x_0^n),$$

$$\hat{\hat{x}}(t_1) = (J(u), y^1(t_1), \ldots, y^p(t_1), x_1^1, \ldots, x_1^n)$$

și unde

$$y^1(t_1) \geqslant a^1, \ldots, y^p(t_1) \geqslant a^p.$$

Vom nota cu $\Sigma(X, U, x_0, x_1, \geqslant a, t_0, t_1)$ clasa comenzilor strict admisibile, pentru a o deosebi de cea introdusă la 2.3.6, iar clasa comenzilor admisibile va rămîne, evident, aceeași : $\Sigma(X, U, x_0, t_0)$. Atunci fie

$$\hat{\hat{A}}(\Sigma(X, U, x_0, t_0)) = \left\{ \hat{\hat{x}}(t_1) \,\middle|\, \frac{d\hat{\hat{x}}}{dt} = \right.$$

$$\left. = \hat{\hat{f}}(t, x, u), \hat{\hat{x}}(t_0) = \hat{\hat{x}}_0, u \in \Sigma(X, U, x_0, t_0) \right\}.$$

Problema de optimalitate revine la găsirea unei comenzi strict admisibile $\bar{u}$ astfel încît funcționala J, definită pe această mulțime, să-și atingă cea mai mică valoare : $J(\bar{u})$. Se vede imediat că

$$\hat{\hat{\bar{x}}}(t_1) = (J(\bar{u}), \bar{y}(t_1), x_1)$$

este un punct extrem a lui $\hat{\hat{A}}(\Sigma(x, U, x_0, t_0))$ în raport cu prima coordonată, p liber la dreapta, deoarece

$$J(\bar{u}) = \inf\{J(u) \mid (J(u), y^1, \ldots, y^p, x_1^1, \ldots, x_1^n), y^1 \geqslant a^1, \ldots, y^p \geqslant a^p\}.$$

Se arată imediat (vezi 2.3.6) că $\hat{\hat{M}}(\hat{\hat{x}}(t_1))$ este o mulțime derivată și, în consecință, normala

$$\hat{\hat{\lambda}} = \hat{\hat{\psi}}(t_1) = (\lambda_0, \mu_1, \ldots, \mu_p, \lambda_1 \ldots, \lambda_n)$$

la hiperplanul de separație, conform primei extensiuni a teoremei de separabilitate, are proprietățile:

1) $\mu_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, p;$

2) $\mu_i = 0$ dacă și numai dacă $\bar{y}^i(t_1) > a^i$, și așa cum rezultă din structura matricei $\hat{\hat{D}}$, soluția $\hat{\hat{\psi}}$ a sistemului asociat este de forma

$$\hat{\hat{\psi}}(t) = (\bar{\psi}_0, \underbrace{\mu_1, \ldots, \mu_p}_{ct}, \bar{\psi}_1(t), \ldots, \bar{\psi}_n(t)), \quad \bar{\psi}_0 = ct \leqslant 0.$$

În consecință, principiul maximului se scrie

$$\mathcal{H}(\hat{\hat{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \mathfrak{M}(\hat{\hat{\psi}}(t), t, \bar{x}(t)),$$

avînd proprietatea

$$\frac{d\mathcal{H}(\hat{\hat{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}(\hat{\hat{\psi}}(t), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\partial t},$$

unde

a) $$\mathcal{H}(\hat{\hat{\psi}}(t), t, x, u) = \mathcal{H}(\hat{\psi}, t, x, u) + <\mu, g(t, x, u)>,$$

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p) \geqslant 0; \quad \mu_i = 0 \leftrightarrow \int_{I_i} g_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, dt > a^i,$$

$$g = (g^1, \ldots, g^p);$$

b) $\hat{\psi}$ rezultă din sistemul asociat, care este

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = -\hat{D}^{\tau}\hat{\psi} - \partial_{\hat{x}}^{\tau} g \cdot \mu.$$

Observație. Dacă există și condiții izoperimetrice de tip egalitate, multiplicatorii corespunzători nu au semn impus, după cum imediat rezultă din reductibilitatea problemei la nivelul spațiului $\hat{\hat{X}}$ și aplicarea teoremei de separație.

2.6. OPTIMALITATEA ÎN CAZUL SISTEMELOR DISCRETE

2.6.1. ENUNȚAREA PROBLEMEI

Pentru comoditatea expunerii analog cu 2.3.1, problema de optimalitate se va enunța pentru cazul extremelor fixe și al numărului de pași impuși.

Se consideră

1) $X = R^n$, spațiul stărilor;

2) $U \subset R^r$;

3) $f: Z \times X \times U \to X$, de forma $f(i, x, u)$, continuă pe $X \times U$ și având derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}$ continue pe $X \times U$ pentru orice $i \in Z$.

Evident

$f(i, x, u) = (f^1(i, x, u), \ldots, f^n(i, x, u))$;

4) $f^0 : Z \times X \times U \to R^1$, de același tip cu funcțiile, $f^1, \ldots, f^n$

5) $x_0, x_f \in X$;

6) $i < k \in Z$.

Se vor defini:

a) o conducere discretă descrisă de sistemul cu diferențe finite:

$$x(\nu + 1) = x(\nu) + f(\nu, x(\nu), u(\nu)), \; u(\nu) \in U$$

În acest caz, o comandă oarecare u este definită pe

$$I_{ik} = \{i, i+1, \ldots, k-1\},$$

cu valori în U, adică

$$u : I_{ik} \to U,$$

reprezentînd de fapt succesiunea de valori $(u(\nu))_{i \leqslant \nu \leqslant k-1}$. O traiectorie va fi mulţimea

$$(x(\nu))_{i \leqslant \nu \leqslant k},$$

unde trecerea de la un punct la alt punct imediat următor este descrisă de ecuaţia cu diferenţe finite.

Procesul de conducere va fi notat prescurtat:

$$x(i) \xrightarrow{u} x(k)$$

şi, după cum uşor se poate constata, comanda este dată prin $k-i$ valori, iar traiectoria rezultă, datorită iniţializării, ca avînd $k-i+1$ puncte;

b) $\Sigma(U, x_0, x_f, i, k) = \{u : I_{ik} \to U \mid x_0 = x(i) \xrightarrow{u} x(k) = x_f\}$,

adică mulţimea tuturor comenzilor care conduc în $k-i$ paşi obiectul din x_0 la momentul discret i în x_f la momentul final k şi care va defini clasa comenzilor strict admisibile;

c) $J : \Sigma(U, x_0, x_f, i, k) \to R^1$

prin egalitate *a*

$$J(u) = \sum_{\nu=i}^{k-1} f^0(\nu, x(\nu), u(\nu)),$$

$x(\nu)$ fiind evident, cauzat de $u(\nu-1)$, definind indicele de performanţă al conducerii discrete.

Scanned with OKEN Scanner

Problema conducerii optimale va fi enunțată astfel: Să se găsească $\bar{u} \in \Sigma(V, x_0, x_f, i, k)$ astfel încît

$$J(\bar{u}) = \inf \{ J(\bar{u}) \mid u \in \Sigma(U, x_0, x_f, i, k)\}.$$

2.6.2. REPREZENTAREA GEOMETRICĂ A OPTIMALITĂȚII

Introducînd variabila x^0 prin

$$x^0(\nu + 1) = x^0(\nu) + f^0(\nu, x(\nu), u(\nu)) \text{ cu } x^0(i) = 0,$$

rezultă imediat

$$x^0(k) = \sum_{\nu=i}^{k-1} f^0(\nu, x(\nu), u(\nu)),$$

adică

$$x^0(k) = J(u).$$

Se vor introduce atunci extensiunile

1) $\hat{x} = (x^0, x)$;

2) $\hat{f} = (f^0, f)$;

3) $\hat{x}(\nu + 1) = \hat{x}(\nu) + \hat{f}(\nu, x(\nu), u(\nu))$,

definind conducerea în sens extins:

$$\hat{x}_0 = (0, x_0) = (0, x(i)) = \hat{x}(i) \xrightarrow{u} \hat{x}(k) = (x^0(k), x(k)) = (J(u), x_f) = \hat{x}_f.$$

Așadar, punctul final $\hat{x}(k)$ va fi plasat pe dreapta Δ perpendiculară pe X în x_f. Evident, în cazul unei comenzi optimale $\bar{u}$, punctul final $\hat{x}(k)$ al traiectoriei optimale va avea pe dreapta Δ cea mai mică altitudine.

Fie acum

$$\Sigma(U, x_0, i, k) = \{u : I_{ik} \to U \mid \hat{x}(i) \xrightarrow{u} \hat{x}(k) = (x^0(k), x(k))$$

și unde $x(k)$ este egal sau diferit de $x_f\}$

adică toate comenzile compatibile cu restricţiile impuse de U care conduc $k-i$ paşi sistemul oriunde. $\Sigma(U, x_0, i, k)$ defineşte clasa comenzilor admisibile. Rezultă imediat incluziunea

$$\Sigma(U, x_0, x_f, i, k) \subset \Sigma(U, x_0, i, k).$$

Fie introdusă mulţimea

$$\hat{A}(\Sigma(U, x_0, i, k)) = \left\{ \hat{x}(k) \mid \hat{x}(k) = \sum_{\nu=i}^{k-1} \hat{f}(\nu, x(\nu), u(\nu)) + \hat{x}(i), u \in \right.$$

$$\left. \in \Sigma(U, x_0, i, k) \right\},$$

adică mulţimea punctelor finale ale tuturor traiectoriilor cauzate de comenzile admisibile.

Atunci se constată imediat că $\hat{\bar{x}}(k) = \hat{\bar{x}}_f = (J(\bar{u}), x_f)$ este un punct extrem în raport cu prima coordonată x^0 a mulţimii $\hat{A}(\Sigma(U, x_0, i, k))$.

2.6.3. TRANSPORTUL DE-A LUNGUL UNEI TRAIECTORII

Să considerăm o conducere

$$\hat{x}(i) \xrightarrow{u} \hat{x}(k)$$

şi fie $j \in I_{ik}$. Să presupunem că punctul $\hat{x}(j)$ al traiectoriei suferă o ε — deplasare:

$$\hat{x}^*(j) = \hat{x}(j) + \varepsilon\hat{\xi}(j) + 0(\varepsilon),$$

unde

$$\hat{\xi}(j) \in \hat{X}(\hat{x}(j)).$$

Să considerăm acum procesul de conducere definit de

$$\hat{x}^*(j) \xrightarrow{u \mid I_{jk}} \hat{x}^*(k),$$

unde $^{u}|I_{jk}$ este definită prin valorile $\{u(j), \ldots, u(k-1)\}$. Să evaluăm deplasarea punctului final $\hat{x}^*(k)$ față de $\hat{x}(k)$. Vom avea

$$\hat{x}^*(\nu+1) = \hat{x}^*(\nu) + \hat{f}(\nu,\ x^*(\nu),\ u(\nu)\ ), \qquad j \leqslant \nu \leqslant k-1,$$

adică

$$\hat{x}(\nu+1) + \varepsilon\hat{\xi}(\nu+1) + 0(\varepsilon) = \hat{x}(\nu) + \varepsilon\hat{\xi}(\nu) + 0(\varepsilon) + \hat{f}(\nu, x(\nu) +$$

$$+ \varepsilon\xi(\nu) + 0(\varepsilon),\ u(\nu)) = \hat{x}(\nu) + \varepsilon\hat{\xi}(\nu) + 0(\varepsilon) + \hat{f}(\nu,\ x(\nu),\ u(\nu)) +$$

$$+ \partial_{\hat{x}}\hat{f}\Big|_{(\nu,\ x(\nu),\ u(\nu))} (\varepsilon\hat{\xi}(\nu) + 0(\varepsilon)) + 0(\varepsilon) = \hat{x}(\nu+1) + \varepsilon\left(E +\right.$$

$$\left. + \partial_{\hat{x}}\hat{f}\Big|_{(\nu,\ x(\nu),\ u(\nu))}\right)\hat{\xi}(\nu) + 0(\varepsilon).$$

Din extremele şirului de egalităţi rezultă

$$\hat{\xi}(\nu+1) = \left(E + \partial_{\hat{x}}\hat{f}\Big|_{(\nu,\ x(\nu),\ u(\nu))}\right)\hat{\xi}(\nu)$$

sau, cu notaţia

$$\hat{D}(\nu) = \partial_{\hat{x}}\hat{f}\Big|_{(\nu,\ x(\nu),\ u(\nu))},$$

se obţine

$$\hat{\xi}(\nu+1) = (E + \hat{D}(\nu))\ \ \hat{\xi}(\nu).$$

Se vede imediat că sistemul în variaţii obţinut, cu diferenţe finite, joate fi scris şi în forma omologă din varianta continuă:

$$\frac{d\hat{\xi}}{dt} = \hat{D}(t)\ \hat{\xi}\ ,$$

adică

$$\hat{\xi}(\nu+1) - \hat{\xi}(\nu) = \hat{D}(\nu)\ \hat{\xi}(\nu).$$

Se va putea scrie

$$\hat{\xi}(j+1) = (E + \hat{D}(j)\ )\ \hat{\xi}(j),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\hat{\xi}(k) = (E + \hat{D}(k-1)\ )\ \hat{\xi}(k-1)$$

sau

$$\hat{\xi}(k) = (E + \hat{D}(k-1))\ \ldots\ (E + \hat{D}(j)\ )\ \hat{\xi}(j).$$

Aşadar, matricea fundamentală a sistemului discret va fi

$$\hat{\Xi}\ (k,\ j) = (E + \hat{D}(k-1))\ \ldots\ (E + \hat{D}(j)\ ),\ j < k,$$

cu convenţia

$$\hat{\Xi}(\nu,\ \nu) = E.$$

În definitiv, rezultă

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\Xi}(k,\ j)\ \hat{\xi}(j).$$

Introducem acum sistemul asociat traiectoriei discrete prin

$$\hat{\psi}(\nu+1) - \hat{\psi}(\nu) = -\hat{D}^T(\nu)\ \hat{\psi}(\nu+1)$$

sau

$$\hat{\psi}(\nu) = (E + \hat{D}^T(\nu))\ \hat{\psi}(\nu+1) = (E + \hat{D}(\nu))^T\ \hat{\psi}(\nu+1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dîndu-se $\hat{\psi}(\nu)$, se obţine pentru $j < k$

$$\hat{\psi}(k-1) = (E + \hat{D}(k-1))^T \hat{\psi}(k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\hat{\psi}(j) = (E + \hat{D}(j))^T \hat{\psi}(j+1)$$

sau

$$\hat{\psi}(j) = (E + \hat{D}(j))^T \ldots (E + \hat{D}(k-1))^T \hat{\psi}(k).$$

sau încă

$$\hat{\psi}(j) = ((E + \hat{D}(k-1)) \ldots (E + \hat{D}(j)))^T \hat{\psi}(k).$$

Deci

$$\hat{\psi}(j) = \hat{\Xi}^T(k, j) \hat{\psi}(k).$$

Se va nota prin analogie cu 2.3.3

$$\hat{\Psi}(j, k) = \hat{\Xi}^T(k, j)$$

şi, în consecinţă

$$\hat{\psi}(j) = \hat{\Psi}(j, k) \hat{\psi}(k).$$

Prin introducerea lui $\hat{\Psi}(j, k)$, transportul poate fi scris

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\Psi}^T(j, k) \hat{\xi}(j)$$

şi deci

Observaţie importantă. $\hat{\Xi}(k, j)$ sau $\hat{\Psi}(j, k)$ sînt ataşaţi unei traiectorii faţă de care s-a evaluat abaterea şi care se numeşte traiectorie de transport. Dacă traiectoria se schimbă, evident se modifică şi operatorii :

$$\hat{\Xi}(k, j), \quad \hat{\Psi}(j, k).$$

Scanned with OKEN Scanner

2.6.4. „TRANSPORTUL" PROBLEMEI DE OPTIMALITATE ÎN PUNCTUL FINAL

Fie ataşată unei traiectorii de transport arbitrare funcţia

$$\hat{F} : I_{ik} \times X \times U \to \hat{X},$$

definită prin

$$\hat{F}(\nu, x, u) = \hat{\Psi}^T (\nu + 1, k)\, \hat{f}(\nu, x, u) - \hat{\Psi}^T(\nu + 1, k)\, \hat{D}(\nu)\, \hat{x} =$$

$$= \hat{\Psi}(\nu + 1, k)\, (\hat{f}(\nu, x, u) - \hat{D}(\nu)\, \hat{x}).$$

Transpunerea în forma discretă a funcţiei $\hat{F}$ de la 2.3.4 s-a făcut ţinînd cont de faptul că echivalentul discret al ecuaţiei

$$\frac{d\hat{\Psi}(t, \tau)}{dt} = -\hat{D}^T(t)\, \hat{\Psi}(t, \tau)$$

este

$$\hat{\Psi}(\nu + 1, k) - \hat{\Psi}(\nu, k) = -\hat{D}^T \hat{\Psi}(\nu + 1, k);$$

aşadar, în locul lui

$$\frac{d\hat{\Psi}(t, t_1)}{dt}$$

se va pune

$$-\hat{\Psi}^T(\nu + 1, k)\, \hat{D}^T(\nu).$$

Proprietăţi ale funcţiei $\hat{F}$

1. De-a lungul unei traiectorii oarecare avem

$$\sum_{\nu=i}^{k-1} \hat{F}(\nu, x(\nu), u(\nu)) = \hat{x}(k) - \hat{\Xi}(k, i)\, \hat{x}(i).$$

Într-adevăr,

$$\sum_{\nu=i}^{k-1} \hat{F}(\nu, x(\nu), u(\nu)) = \sum_{\nu=i}^{k-1} \hat{\Psi}^T(\nu+1, k)\,(\hat{f}(\nu, x(\nu), u(\nu)) - \hat{D}(\nu)\,\hat{x}(\nu)) =$$

$$= \sum_{\nu=i}^{k-1} \hat{\Psi}^T(\nu+1, k)\,(\hat{f}(\nu, x(\nu), u(\nu)) + \hat{x}(\nu) - (E + \hat{D}(\nu))\,\hat{x}(\nu)) =$$

$$= \sum_{\nu=i}^{k-1} \hat{\Xi}(k, \nu+1)\,(\hat{x}(\nu+1) - (E + \hat{D}(\nu))\,\hat{x}(\nu)) =$$

$$= \sum_{\nu=i}^{k-1} (\hat{\Xi}(k, \nu+1)\,\hat{x}(\nu+1) - \hat{\Xi}(k, \nu)\,\hat{x}(\nu)) =$$

$$= \hat{\Xi}(k, i+1)\,\hat{x}(i+1) - \hat{\Xi}(k, i)\,\hat{x}(i) + \hat{\Xi}(k, i+2)\,\hat{x}(i+2) -$$

$$- \hat{\Xi}(k, i+1)\,\hat{x}(i+1) + \ldots + \hat{\Xi}(k, k)\,\hat{x}(k) - \hat{\Xi}(k, k-1)\,\hat{x}(k-1) =$$

$$= \hat{x}(k) - \hat{\Xi}(k, i)\,\hat{x}(i),$$

deci în final

$$\hat{x}(k) = \hat{\Xi}(k, i)\,\hat{x}(i) + \sum_{\nu=i}^{k-1} \hat{F}(\nu, x(\nu), u(\nu)).$$

2. De-a lungul traiectoriei de transport avem

$$\partial_{\hat{x}} \hat{F}(\nu, x, u) = 0.$$

Din

$$\partial_{\hat{x}} \hat{F}(\nu, x, u) = \hat{\Psi}^T(\nu+1, k)\,(\partial_{\hat{x}} \hat{f}(\nu, x, u) - \hat{D}(\nu))$$

şi ţinînd cont că

$$\partial_{\hat{x}} \hat{f}\Big|_{\text{traiectoria de transport,}} = \hat{D}(\nu)$$

rezultă egalitatea dorită.

Consecința proprietății 1) este că

$$\hat{A}(\Sigma(U, x_0, i, k)) =$$

$$= \left\{ \hat{\Xi}(k, i)\, \hat{x}_0 + \sum_{\nu=1}^{k-1} \hat{F}(\nu, x(\nu), u(\nu)) \mid u \in \Sigma(U, x_0, i, k) \right\}.$$

Fie acum introdusă, pentru o traiectorie de transport cauzată de o comandă admisibilă, mulțimea

$$\hat{M}(\hat{x}(k)) = \{\hat{F}(\nu, x(\nu), v) - \hat{F}(\nu, x(\nu), u(\nu)) \mid \nu \in I_{ik}, , v \in U\}.$$

Este valabilă următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Dacă* $\hat{G}(\nu, x) = \{\hat{f}(\nu, x, u) \mid u \in U\}$ *este convexă pentru orice* $\nu \in I_{ik}$, $x \in X$, *atunci* $\hat{M}(\hat{x}(k))$ este o mulțime derivată a lui $\hat{A}(\Sigma(U, x_0, i, k))$.

Demonstrație. În cele ce urmează, esențială va fi proprietatea de convexitate a mulțimilor $\hat{G}(\nu, x)$, care permite echivalarea în cazul sistemelor discrete a variațiilor comenzii de amplitudine oarecare, dar de durată scurtă, $\varepsilon\delta\tau$, din cadrul sistemelor continue.

Fie acum :

1) q un întreg oarecare ;

2) $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_q$, q momente distincte sau nu din I_{ik} ;

3) $\delta\tau^1 \ldots \delta\tau^q \geqslant 0$, cu $\delta\tau^\alpha \leqslant M$; $\alpha = 1, \ldots, q$; $M > 0$;

4) $v_1, \ldots v_q \in U$;

5) $\varepsilon_0 > 0$ suficient de mic ca pentru orice $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ să avem

$$1 - \varepsilon(\delta\tau^1 + \ldots + \delta\tau^q) \geqslant 0.$$

Se va construi acum o comandă variată u definită pe I_{ik}

Scanned with OKEN Scanner

Vom presupune că

$$\left.\begin{array}{lll}
i = \nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_{\beta_i} & \text{corespunzînd } \delta\tau^1, & \ldots \delta\tau^{\beta_i} \\
i+1 = \nu_{\beta_i}+1 = \ldots = \nu_{\beta_{i+1}} & \text{,,} & \delta\tau^{\beta_i+1}, \ldots \delta\tau^{\beta_{i+1}} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
j = \nu_{\beta_{j-1}}+1 = \ldots = \nu_{\beta_j} & \text{,,} & \delta\tau^{\beta_{j-1}+1}, \ldots \delta\tau^{\beta_j} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
k = \nu_{\beta_{k-1}}+1 = \ldots = \nu_{\beta_k} = \nu_q & \text{,,} & \delta\tau^{\beta_{k-1}+1}, \ldots \delta\tau^{q}
\end{array}\right\} \text{„}L\text{“}$$

S-ar putea ca momentul j să nu figureze în şirul $\nu_1, \ldots, \nu_q$. Se va introduce totuşi un şir de momente confundate :

$$\nu_{\beta_{j-1}} + 1 = \ldots = \nu_{\beta_j}, \quad \beta_j \text{ arbitrar},$$

dar se va considera

$$\delta\tau^{\beta_{j-1}+1} = \ldots = \delta\tau^{\beta_j} = 0.$$

În felul acesta, fiecărui moment j,i se poate afecta o secvenţă de momente confundate ν_α, avînd grijă ca $\delta\tau^\alpha$ corespunzători să fie nuli. Aşadar se poate presupune de la început că mărimile introduse la 2) şi 3) se repartizează fiecărui moment ν din I_{ik}, conform listei L.

Traiectoria variată va fi notată cu $\hat{x}^*(\nu)$. Nemodificîndu-se condiţia iniţială, evident avem

$$\hat{x}^*(i) = \hat{x}(i) = \hat{x}_0.$$

Pentru momentul i şi analog pentru celelalte momente $u^*(i)$ se construieşte astfel :

$$\hat{f}(i, x^*(i), u^*(i)) =$$

$$= \left(1 - \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{\beta_i} \delta\tau^\alpha\right) \hat{f}(i, x^*(i), u(i) + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{\beta_i} \delta\tau^\alpha \hat{f}(i, x^*(i), v_\alpha),$$

egalitate posibilă datorită convexităţii mulţimii $\hat{G}(i,\ x(i))$. Evident

$$\hat{x}^*(i+1) = \hat{x}^*(i) + \hat{f}(i,\ x^*(i)\ u^*(i)\ )$$

şi unde, după cum se vede, $\hat{f}(i,\ x^*(i),\ u^*(i))$ a fost calculat mai sus.

Urmează o procedură identică pentru toate momentele, construindu-se succesiv toate valorile $(u^*(\nu))_{i\leqslant\nu\leqslant k-1}$ şi unde $x^*(\hat{\nu}+1)$ este cauzat de $u^*(\nu)$. Se vede de asemenea că, dacă pentru moment j oarecare $\delta\tau^{\beta_{j-1}+1} = \ldots = \delta\tau^{\beta_j} = 0$, atunci

$$\hat{f}(j,\ x^*(j),\ u^*(j)) = \hat{f}(j,\ x^*(j),\ u(j)),$$

manifestîndu-se deci efectul comenzii nevariate $u(j)$.

Sînt valabile două proprietăţi impuse de comanda variată u^*

Proprietatea 1. Pentru orice moment $j \in I_{ik}$ avem

$$\frac{\hat{x}^*(j) - \hat{x}(j)}{\varepsilon} = \frac{\hat{\xi}(j)}{\varepsilon},$$

care este mărginită în raport cu ε.

Într-adevăr, pentru $j = i$ avem

$$\frac{\hat{x}^*(i) - \hat{x}(i)}{\varepsilon} = 0.$$

Presupunem adevărată proprietatea pentru un j oarecare. Atunci

$$\frac{\hat{\xi}(j+1)}{\varepsilon} = \frac{\hat{x}^*(j+1) - \hat{x}(j)}{\varepsilon} = \frac{\hat{x}^*(j) - \hat{x}(j)}{\varepsilon} +$$

$$+ \frac{\hat{f}(j, x^*(j), u^*(j)) - \hat{f}(j, x^*(j), u(j))}{\varepsilon} = \frac{\xi(j)}{\varepsilon} +$$

$$+ \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha\ (\hat{f}(j,\ x^*(j), v_\alpha) - \hat{f}(j,\ x^*(j),\ u(j)))$$

şi, cum $\frac{\hat{\xi}(j)}{\varepsilon}$ este mărginit, rezultă că şi $\frac{\hat{\xi}(j+1)}{\varepsilon}$ are aceeaşi proprietate.

Proprietatea 2. Oricare punct al traiectoriei, $\hat{x}^*(\nu)$ depinde continuu de variabilele $\varepsilon\delta\tau^1, \ldots, \varepsilon\delta\tau^q$.

Demonstraţia se face de asemenea prin inducţie. Fie $j = i + 1$

$$\hat{x}^*(i+1) = \hat{x}_0 + \hat{f}(i, x_0, u^*(i)) = \hat{x}_0 + \hat{f}(i, x^*(i), u^*(i)) =$$

$$= \hat{x}_0 + \left(1 - \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{\beta_i} \delta\tau^\alpha\right)\hat{f}(i, x_0, u(i)) + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{\beta_i} \delta\tau^\alpha \hat{f}(i, x_0, u(i))$$

ceea ce denotă o dependenţă liniar afină, deci continuă.

Fie acum j oarecare, presupunînd proprietatea adevărată. Pentru acesta să arătăm că ea se menţine pentru $j+1$:

$$\hat{x}^*(j+1) = \hat{x}^*(j) + \hat{f}(j, x^*(j), u^*(j)) = \hat{x}^*(j) +$$

$$+ \left(1 - \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha\right)\hat{f}(j, x^*(j), u(j)) + \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha \hat{f}(j, x^*(j), v_\alpha).$$

Se vede imediat că $\hat{x}^*(j+1)$ este o sumă de funcţii continue, direct sau prin compunere, de variabilele amintite.

Aceste proprietăţi fiind stabilite, să vedem efectul lui u^* asupra punctului final $\hat{x}^*(k)$. Relaţia de definiţie a lui $u^*(i)$, ca de altfel toate celelalte corespunzătoare momentelor din I_{ii}, poate fi scrisă

$$\hat{\Psi}^T(i+1, k)\left(\hat{f}(i, x^*(i), u^*(i)) - \hat{D}(i)\,\hat{x}^*(i)\right) =$$

$$= \left(1 - \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{\beta_i} \delta\tau^\alpha\right)\hat{\Psi}^T(i+1, k)\left(\hat{f}(i, x^*(i), u(i)) -\right.$$

$$\left. - \hat{D}(i)\,\hat{x}^*(i)\right) + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{\beta_i} \delta\tau^\alpha \hat{\Psi}^T(i+1, k)\left(\hat{f}(i, x^*(i), v_\alpha) - \hat{D}(i)\,\hat{x}^*(i)\right).$$

Aşadar

$$\hat{F}(i, x^*(i), u^*(i)) = \left(1 - \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{\beta_i} \delta\tau^\alpha\right) \hat{F}(i, x^*(i), u(i)) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{\beta_i} \delta\tau^\alpha \hat{F}(i, x^*(i), v_\alpha)$$

şi în consecinţă, pentru orice $j \in I_{ik}$,

$$\hat{F}(j, x^*(j), u^*(j)) = \left(1 - \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha\right) \hat{F}(j, x^*(j), u^*(j) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha \hat{F}(j, x^*(j), v_\alpha).$$

Atunci

$$\hat{F}(j, x^*(j), u(j)) = \hat{F}(j, x(j), u(j)) + \partial_{\hat{x}} \hat{F}(j, x(j), u(j))\hat{\xi}(j) + 0(\hat{\xi}(j)) =$$

$$= \hat{F}(j, x(j), u(j)) + 0(\hat{\xi}(j)),$$

$\partial_{\hat{x}} \hat{F}$ fiind calculat pe traiectoria de transport şi deci anulîndu-se, iar

$$\hat{F}(j, x^*(j), v_\alpha) = \hat{F}(j, x(j), v_\alpha) + \partial_{\hat{x}} \hat{F}_{j\alpha} \hat{\xi}(j) + 0(\hat{\xi}(j)),$$

unde

$$\partial_{\hat{x}} \hat{F}_{j\alpha} = \partial_{\hat{x}} \hat{F}(j, x^*(j), v_\alpha),$$

care nu se mai anulează. Va rezulta

$$\hat{F}(j, x^*(j), u^*(j)) = \left(1 - \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha\right)(\hat{F}(j, x(j), u(j)) + o(\hat{\xi}(j))) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha (\hat{F}(j, x(j), v_\alpha) + \partial_{\hat{x}} \hat{F}_{j\alpha} \hat{\xi}(j) + o(\hat{\xi}(j))) =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \hat{F}(j, x(j), u(j)) + \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha (\hat{F}(j, x(j), v_\alpha) - \hat{F}(j, x(j), u(j))) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha o(\xi(j)) + \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha \partial_{\hat{x}} \hat{F}_{j\alpha} \hat{\xi}(j) + o(\hat{\xi}(j)).$$

Ultimii trei termeni sînt de tipul $o(\varepsilon)$. Într-adevăr, împărţindu-i cu ε, rezultă

$$\sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha o(\hat{\xi}(j)) + \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha \partial_{\hat{x}} \hat{F}_{j\alpha} \hat{\xi}(j) + \frac{o(\hat{\xi}(j))}{||\hat{\xi}(j)||} \cdot \frac{||\hat{\xi}(j)||}{\varepsilon}.$$

Primii doi termeni ai expresiei de mai sus tind spre zero o dată cu ε căci este evident că, atunci cînd $\varepsilon \to 0, \varepsilon\delta\tau^\alpha \to 0$ şi deci $\hat{\xi}(j) \to 0$ şi $o(\hat{\xi}(j)) \to 0$. Ultimul termen, conform proprietăţii 1, tinde de asemenea spre zero, deoarece $\frac{||\hat{\xi}(j)||}{\varepsilon}$ este mărginită. În consecinţă,

$$\hat{F}(j, x^*(j), u^*(j)) = \hat{F}(j, x(j), u(j)) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\alpha=\beta_{j-1}+1}^{\beta_j} \delta\tau^\alpha (\hat{F}(\nu_\alpha, x(\nu_\alpha), v_\alpha) - \hat{F}(v_\alpha, x(\nu_\alpha), u(\nu_\alpha))) + 0(\varepsilon).$$

Sumînd ultima expresie în raport cu j de la $j = i$ la $k-1$ şi ţinînd cont de proprietatea nr. 1 a funcţiei $\hat{F}$, rezultă

$$\hat{x}^*(k) + \hat{\Xi}(k, i)\hat{x}_0 = \hat{x}(k) + \hat{\Xi}(k, i)\hat{x}_0 +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{q} \delta\tau^\alpha (\hat{F}(\nu_\alpha, x(\nu_\alpha), v_\alpha) - \hat{F}(\nu_\alpha, x(\nu_\alpha), u(\nu_\alpha))) + 0(\varepsilon)$$

sau în definitiv

$$\hat{x}^*(k) = \hat{x}(k) + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^{q} \delta\tau^\alpha (\hat{F}(\nu_\alpha, x(\nu_\alpha), v_\alpha) - \hat{F}(\nu_\alpha, x(\nu_\alpha), u(\nu_\alpha))) + 0(\varepsilon)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde :

$$\varepsilon \in [0,\ \varepsilon_0],$$

$$\delta\tau^{\alpha} \in [0,\ M],$$

$$\hat{A}\ (\Sigma(U,\ x_0,\ i,\ k)) \ni \hat{x}^*(k),$$

care depinde continuu de $\varepsilon\delta\tau^{\alpha}$ conform proprietății nr. 2 de mai sus.

S-a generat astfel un con de variație. Așadar, $\hat{M}(\hat{x}(k))$ este o mulțime derivată în virtutea convexității mulțimilor $\hat{G}(\nu,\ x)$.

Consecință. Dacă $\overline{u} \in \Sigma(U,\ x_0,\ x_f,\ i,\ k)$ este optimală, $\hat{\overline{x}}(k)$ fiind un punct extrem, iar $\hat{M}(\hat{\overline{x}},\ (k))$ o mulțime derivată, rezultă că există $R^{n+1} \ni \hat{\lambda} \neq 0$ astfel încît

$$< \hat{\lambda},\ \hat{F}(\nu,\ \overline{x}(\nu),\ v) - \hat{F}(\nu,\ \overline{x}(\nu),\ \overline{u}(\nu)\ ) > \leqslant 0.$$

pentru $\nu \in I_{ik}$, $v \in U$, conform teoremei de separabilitate de la 2.2.3. Punînd $\hat{\lambda} = \hat{\overline{\psi}}(k)$ și explicitînd pe $\hat{F}$, se obține

$$< \hat{\overline{\psi}}(k),\ \hat{\Psi}^T(\nu+1,\ k)\ (\hat{f}(\nu,\ \overline{x}(\nu),\ v) - \hat{f}(\nu,\ \overline{x}\ (\nu), \overline{u}(\nu))) > \leqslant 0$$

sau

$$< \hat{\Psi}(\nu+1, k)\ \hat{\overline{\psi}}(k), \hat{f}(\nu, \overline{x}(\nu), v) > \leqslant < \Psi(\nu+1, \hat{f}(\nu, \overline{x}(\nu), \overline{u}(\nu)) >$$

pentru orice $\nu \in I_{ik}$ $v \in U$.

Ținînd cont de definiția sistemului asociat, se obține

$$< \hat{\overline{\psi}}(\nu+1),\ \hat{f}(\nu,\ \overline{x}(\nu),\ v) > \leqslant < \hat{\overline{\psi}}(\nu +$$

$$+ 1), \hat{f}(\nu,\ \overline{x}(\nu),\ \overline{u}\ (\nu)) >,\ \nu \in I_{ik},\ v \in U.$$

Scanned with OKEN Scanner

2.6.5. FORMALISMUL LUI HAMILTON ŞI PRINCIPIUL MAXIMULUI

Fie introdusă pe $R^{n+1} \times Z \times R^n \times U$ cu valori reale funcţia

$$\mathcal{H}(\hat{\psi}, \nu, x, u) = < \hat{\psi}, \hat{f}(\nu, x, u) >.$$

Se constată cu uşurinţă că se obţine imediat atît sistemul cu diferenţe finite care descriu o traiectorie, cît şi sistemul asociat din

$$\hat{x}(\nu+1) - \hat{x}(\nu) = \mathcal{H}_{\hat{\psi}}(\hat{\psi}, \nu, x(\nu), u(\nu)),$$

$$\hat{\psi}(\nu+1) - \hat{\psi}(\nu) = -\mathcal{H}_{\hat{x}}(\hat{\psi}(\nu+1), \nu, x(\nu), u(\nu)).$$

Introducem de asemenea

$$\mathcal{M}(\hat{\psi}, \nu, x) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\hat{\psi}, \nu, x, u).$$

Se poate enunţa acum principiul maximului prin următoarea teoremă :

TEOREMĂ (*principiul maximului*). *Fie* $\bar{u} \in \Sigma(U, x_0, x_f, i, k)$ *optimală. Dacă*

1) $\hat{G}(\nu, x)$ *sînt convexe pentru orice* $\nu \in I_{ik}$ *şi* $x \in X$,

2) *pentru orice* ν, $(E + \hat{D}(\nu))$ *de-a lungul traiectoriei optimale nu este degenerat, atunci există o soluţie* $\hat{\bar{\psi}}$ *nebanală a sistemului asociat*

$$\hat{\psi}(\nu+1) - \hat{\psi}(\nu) = -\hat{D}^T(\nu)\,\hat{\psi}(\nu+1),$$

iniţializată într-o condiţie nenulă în $\nu = k$ *astfel încît*

1) $\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(\nu+1), \nu, \bar{x}(\nu), \bar{u}(\nu)) = \mathcal{M}(\hat{\bar{\psi}}(\nu+1), \nu, \bar{x}(\nu))$ *pentru orice* $\nu \in I_{ik}$;

2) $\psi_0 = \text{ct} \leqslant 0$.

Demonstrație. *Deoarece* $\hat{\lambda} = \hat{\bar{\psi}}(k) \neq 0$ și $(E + \hat{D}(\nu))$ nu este degenerat, rezultă că $\hat{\Psi}(\nu, k)$ este nedegenerat și deci

$$\hat{\bar{\psi}}(\nu) = \Psi(\nu, k)\, \hat{\bar{\psi}}(k) \neq 0$$

pentru orice $\nu \in I_{ik}$.

Proprietatea 1) rezultă imediat din ultima inegalitate de la sfîrșitul lui 2.5.4, iar proprietatea 2) este banală, deoarece $\psi_0(k) = \lambda_0 \leqslant 0$ și $\psi_0(\nu + 1) - \psi_0(\nu) = 0$, coloana I a lui $\hat{D}(\nu)$ fiind nulă. Principiul maximului este deci complet demonstrat.

Observație. Introducerea restricțiilor de tip izoperimetric și a condițiilor de transversalitate este banală, procedura fiind analogă cu cea din cazul continuu rezultatele fiind de același tip

CAPITOLUL 3 ECUAȚIA LUI BELLMAN ȘI FORMALISMUL HAMILTON-JACOBI. PRINCIPIUL GENERAL AL PROGRAMĂRII DINAMICE

3.1. ENUNȚAREA PROBLEMEI

Să considerăm:

1) $D \subset X^*$ un domeniu;

2) $S_1^* \subset D$ o varietate netedă;

3) $U \subset R^r$ o mulțime oarecare;

4) $\hat{f}: D \times U \to R^{n+1}$, $\hat{f} = (f^0, f^1, \ldots, f^n) = (f^0, f^1)$,

unde f^i, $\dfrac{\partial f^i}{\partial t}$, $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$; $i = 0, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ sînt continue în $D \times U$;

5) un obiect condus de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u),$$

6) $\mathcal{U}(U, D, t, x, S_1^*)$ clasa comenzilor continue pe porțiuni care conduc faza $(t, x) \in D$ pe S_1^*, traiectoria de fază

$$\{(\tau, x(\tau)) \mid t \leqslant \tau \leqslant t_1\}$$

fiind conținută în întregime în D. Remarcăm că t_1 poate sau nu să fie impus, el corespunzînd momentului cînd $(t_1, x(t_1)) \in S_1^*$.

Evident $\mathcal{U}(U, D, t, x, S_1^*)$ poate să fie vidă, drept care, în consecință, problema conducerii nu are sens.

Indicele de performanță al conducerii este definit pe

$$\bigcup_{(t, x) \in D} (\{(t, x)\} \times \mathcal{U}(U, D, t, x, S_1^*)),$$

Scanned with OKEN Scanner

cu valori reale prin egalitatea

$$J(t, x, u) = \int_t^{t_1} f^0(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau;\ (t, x) \in D,\ u \in \mathcal{U}(U, D, t, x, S_1^*),$$

unde $x(\tau)$ este traiectoria cauzată de comanda $u(\tau)$ şi iniţializată în x la momentul t:

$$\frac{dx}{d\tau} = f(\tau, x, u(\tau)),\ x(\tau)|_{\tau=t} = x.$$

Problema de optimalitate referitoare la domeniul D constă în determinarea „procedurii" generale de găsire a comenzilor optimale pentru toate punctele $(t, x) \in D$ neaparţinînd varietăţii S_1^*, în scopul transportării acestora în mod optimal pe varietatea finală S_1^*, înţelegînd prin comandă optimală acea comandă care efectuează deplasarea cu indice de performanţă minim.

Aşadar,

$$\bar{u}_{(t, x)} \in \mathcal{U}(U, D, t, x, S_1^*)$$

este optimală dacă

$$J(t, x, \bar{u}_{(t, x)}) = \min \{J(t, x, u_{(t, x)}) \mid u_{(t, x)} \in \mathcal{U}(U, D, t, x, S_1^*)\}.$$

Nu este exclus să existe pentru aceeaşi fază (t, x) mai multe comenzi optimale.

Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 1. Fie

1) $(t, x) \in D$;

2) $\bar{u}_{(t, x)}$ *o comandă optimală cauzînd traiectoria optimală* $\bar{x}(\tau)$ $(t \leqslant \tau \leqslant \bar{t}_1)$.

Atunci pentru orice $\tau \in [t, \bar{t}_1]$

$$u^*_{(\tau, \bar{x}(\tau))} = \bar{u}_{(t, x)}|_{[\tau, \bar{t}_1]}$$

este o comandă optimală referitoare la faza $(\tau, \bar{x}(\tau))$.

Demonstrație. Să presupunem contrariul, și anume că $u^*_{(\tau,\ \bar{x}(\tau))}$ nu este optimală. Fie atunci $\bar{u}_{(\tau,\ \bar{x}(\tau))}$ o comandă optimală care transferă faza $(\tau,\ \bar{x}(\tau))$ în mod optimal de-a lungul traiectoriei $\bar{x}'(\theta)$ cu $\tau \leqslant \theta \leqslant \bar{t}_1$ pe varietatea finală.

Se introduce

$$\bar{u}'_{(t,\ x)}(\theta) = \begin{cases} \bar{u}_{(t,\ x)}(\theta), & \theta \in [t,\ \tau), \\ \bar{u}_{(\tau,\ \bar{x}(\tau))}(\theta), & \theta \in [\tau,\ t'_1]. \end{cases}$$

Atunci

$$J(t,\ x,\ \bar{u}_{(t,\ x)}) = \int_t^{\bar{t}_1} f^0(\theta,\ \bar{x}(\theta),\ \bar{u}_{(t,\ x)}(\theta))\ \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_t^{\tau} f^0(\theta,\ \bar{x}(\theta),\ \bar{u}_{(t,\ x)}(\theta))\ \mathrm{d}\theta + \int_\tau^{\bar{t}_1} f^0(\theta,\ \bar{x}(\theta) u^*_{(\tau,\ x(\tau))}(\theta))\mathrm{d}\theta <$$

$$< \int_t^{\tau} f^0(\theta,\ \bar{x}(\theta),\ \bar{u}_{(t,\ x)}(\theta))\ \mathrm{d}\theta + \int_\tau^{\bar{t}'_1} f^0(\theta,\ \bar{x}'(\theta),\ \bar{u}_{(\tau,\ \bar{x}(\tau))}(\theta))\ \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_t^{t'_1} f^0(\theta,\ \bar{x}''(\theta),\ \bar{u}'_{(t,\ x)}(\theta))\ \mathrm{d}\theta = J(t,\ x,\ \bar{u}'_{(t,\ x)}),$$

unde

$$\bar{x}''(\theta) = \begin{cases} \bar{x}(\theta) & \theta \in [t,\ \tau), \\ \bar{x}'(\theta) & \theta \in [\tau,\ \bar{t}'_1]. \end{cases}$$

Așadar

$$J(t,\ x,\ \bar{u}_{(t,\ x)}) < J(t,\ x,\ \bar{u}'_{(t,\ x)}),$$

ceea ce contrazice faptul că $\bar{u}_{(t,\ x)}$ este optimală.

Să presupunem acum că pentru fiecare $(t,\ x) \in D$ există o comandă optimală $\bar{u}_{(t,x)}$ și numai una singură. Atunci este bine definită funcția $k : D \to U$ prin egalitatea

$$k(t,\ x) = \bar{u}_{(t,\ x)}(t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă imediat, în baza teoremei 1 de mai sus, că, dacă $\bar{x}(\theta)$, $t \leqslant \theta \leqslant \bar{t}_1$ este traiectoria optimală cauzată de $\bar{u}(t, x)$, inițializată evident în (t, x), comanda optimală este descrisă de $k(\theta, \bar{x}(\theta))$, $\theta \in [t, \bar{t}_1]$. Acest lucru se datorește:

— teoremei nr. 1, care afirmă că $\bar{u}_{(\theta, \bar{x}(\theta))}$ este de asemenea optimală $\theta \in [t, t_1]$;

— ipotezei de unicitate a comenzii optimale, care permite ca funcția k să fie bine definită.

Se poate acum în final formula problema completă a optimalității în D. Aceasta constă în determinarea, dacă există și este posibil, a funcției $k : D \to U$. De altfel, de multe ori se mai spune că determinarea funcției k formează problema așa-numitei sinteze optimale.

În cele ce urmează, vom aborda problema sintezei optimale în sensul lui Bellman, furnizîndu-se totodată și condiții de suficiență pentru optimalitate. Aceste condiții reclamă ipoteze de analiticitate tari, la care în prezent, pe baza lucrărilor lui V. Boltianski, se poate renunța, obținîndu-se totodată un grad lărgit de generalitate. Aceste probleme se vor aborda cu ocazia analizei condițiilor de suficiență care fac obiectul capitolului 5.

Să introducem acum funcția

$$S : D \to R^1$$

prin egalitatea

$$S(t, x) = \inf \{J(t, x, u_{(t,x)}) \mid u_{(t,x)} \in \mathcal{U}(U, D, t, x, S_1^*)\} =$$

$$= J(t, x, \bar{u}_{(t,x)}),$$

unde se vede imediat că definirea funcției S nu reclamă decît existența conducerii optimale și nu și unicitatea acesteia. Funcția S a fost introdusă în conexiune cu noțiunea de conducere optimală de către R. Bellman, iar procedura de stabilire a ecuației care descrie prin soluția ei funcția S reprezintă de fapt aplicarea principiului programării dinamice în cazul continuu. Maniera de scriere a ecuației lui Bellman este analogă cu ecuația Hamilton-Jacobi din mecanica clasică.

Scanned with OKEN Scanner

3.2. TEOREMA DE NECESITATE. ECUAȚIA LUI BELLMAN

TEOREMA 2 (condiția de necesitate). *Să considerăm în condițiile enunțate la începutul lui* 3.1 :

1) $G = D \setminus S_1^*$, *este deschisă* ;

2) *pentru fiecare* $(t, x) \in G$ *există o comandă* $\bar{u}_{(t,x)}$ *optimală care transferă faza* (t, x) *pe varietatea netedă* S_1^* ;

3) $S : D \to R^1$, *funcția introdusă de Bellman, este bine definită, după cum reiese de la* 2), *presupunîndu-se continuă, cu derivate parțiale în raport cu variabilele* $t, x^1, \ldots, x^n$ *continue, adică funcțiile*

$$S,\ S_t = \frac{\partial S}{\partial t},\ S_x = \operatorname{grad}_x S = \nabla_x S$$

sînt continue.

Atunci funcția S *verifică în* D *ecuația*

$$\inf_{v \in U} \left(< S_x(t, x), f(t, x, v) > + f^0(t, x, v) \right) = - S_t(t, x),$$

cu

$$S(t, x)|_{S_1^*} = 0,$$

care poartă numele de ecuația lui Bellman.

Demonstrație. Fie $(t, x) \in G$ și conform cu 2) $\bar{u}_{(t,x)}$ comanda optimală cauzînd traiectoria $\bar{x}(\theta)$, $\theta \in [t, \bar{t}_1]$, $\bar{t}_1$, depinzînd evident de (t, x). Fie acum $v \in U$ și comanda

$$u : [t, t + \varepsilon\delta t] \to U,$$

definită prin

$$u(\theta) = v.$$

Din

$$\frac{dx}{d\theta} = f(\theta, x, v) \text{ cu } x(\theta)|_{\theta = t} = x$$

rezultă

$$x(\theta) - x = \int_t^\theta f(\eta, x(\eta), v)\, d\eta, \quad \theta \in [t, t + \varepsilon\delta t]$$

sau

$$x(t + \varepsilon\delta t) - x = \varepsilon\delta t f(t, x, v) + 0(\varepsilon),$$

conform teoremei de medie.
După cum se vede imediat,

$$\rho(\varepsilon) = \|(t + \varepsilon\delta t, x(t + \varepsilon\delta t)) - (t, x)\| = \|(\varepsilon\delta t, x(t + \varepsilon\delta t) -$$

$$- x)\| = \varepsilon \left\| \left(\delta t, \delta t f(t, x, v) + \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \right\| \to 0, \text{ cînd } \varepsilon \to 0.$$

Conform cu 1), există un $\varepsilon > 0$ suficient de mic ca $\overline{V}_{\rho(\varepsilon)}((t, x)) \subset G$, adică

$$(t + \varepsilon\delta t, x(t + \varepsilon\delta t)) \in F_r(V_{\rho(\varepsilon)}((t, x))) \subset G.$$

Pentru $(t + \varepsilon\delta t, x(t + \varepsilon\delta t))$ există o comandă optimală $\overline{u}_{(t+\varepsilon\delta t, x(t+\varepsilon\delta t))}$, de unde rezultă imediat că

$$\mathcal{U}(U, D, t, x, S_1^*) \ni u^*(\theta) =$$

$$= \begin{cases} v, & \theta \in [t, t + \varepsilon\delta t], \\ \overline{u}_{(t+\varepsilon\delta t, x(t+\varepsilon\delta t))}(\theta), & \theta \in [t + \varepsilon\delta t, \bar{t}_1'], \end{cases}$$

$\bar{t}_1'$ fiind timpul final al conducerii optimale efectuată sub acțiunea comenzii $\overline{u}_{(t+\varepsilon\delta t, x(t+\varepsilon\delta t))}$. Atunci

$$J(t, x, \overline{u}_{(t,x)}) \leqslant J_1'(t, x, u^*) = \int_t^{t+\varepsilon\delta t} f^0(\theta, x(\theta), v)\, d\theta +$$

$$+ J(t + \varepsilon\delta t, x(t + \varepsilon\delta t), \overline{u}_{(t+\varepsilon\delta t, x(t+\varepsilon\delta t))}),$$

deci

$$S(t, x) \leqslant \int_t^{t+\varepsilon\delta t} f^0(\theta, x(\theta), v)\, d\theta + S(t+\varepsilon\delta t, x(t+\varepsilon\delta t))$$

sau

$$0 \leqslant \varepsilon\delta t f^0(t, x, v) + 0(\varepsilon) + S(t+\varepsilon\delta t, x(t+\varepsilon\delta t)) - S(t, x).$$

Întrucît

— segmentul : $[(t, x), (t+\varepsilon\delta t, x(t+\varepsilon\delta t))] \subset \overline{V}_{\rho(\varepsilon)}((t,x)) \subset G$;

— S_t, S_x continue,

se poate aplica teorema creşterilor finite :

$$0 \leqslant \varepsilon\delta t f^0(t, x, v) + 0(\varepsilon) + \varepsilon\delta t\, S_t(t+\mu\delta t, \xi) +$$

$$+ < x(t+\varepsilon\delta t) - x, S_x(t+\mu\delta t, \xi) >,$$

unde

$$0 \leqslant \mu \leqslant \varepsilon$$

$$\xi \in [x, x(t+\varepsilon\delta t)]$$

sau :

$$0 \leqslant \varepsilon\delta t f^0(t, x, v) + 0(\varepsilon) + \varepsilon\delta t\, S_t(t+\mu\delta t, \xi) +$$

$$+ < \varepsilon\delta t f(t, x, v) + 0(\varepsilon), S_x(t+\mu\delta t, \xi) >.$$

În consecinţă

$$0 \leqslant f^0(t, x, v) + \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{1}{\delta t} + S_t(t+\mu\delta t, \xi) + < f(t, x, v) +$$

$$+ \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{1}{\delta t}, S_x(t+\mu\delta t, \xi) >.$$

Făcînd $\varepsilon \to 0$, adică

$$\frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0,$$

$$\xi \to x,$$

şi deci datorită continuităţii

$$0 \leqslant f^0(t, x, v) + S_t(t, x) + \langle f(t, x, v), S_x(t, x) \rangle .$$

Pe de altă parte,

$$J(t, x, \bar{u}_{(t,x)}) = \int_t^{t+\varepsilon\delta t} f^0(\theta, \bar{x}(\theta), \bar{u}_{(t,x)}(\theta))\, d\theta +$$

$$+ \int_{t+\varepsilon\delta t}^{\bar{t}_1} f^0(\theta, \bar{x}(\theta), \bar{u}_{(t,x)}(\theta))\, d\theta.$$

Conform teoremei 1 de la 3.1,

$$\bar{u}_{(t,x)} \,|_{[t+\varepsilon\delta t,\, \bar{t}_1]}$$

este de asemenea optimală şi deci

$$S(t, x) = \varepsilon\delta t f^0(t, x, \bar{u}_{(t,x)}(t)) + 0(\varepsilon) + S(t + \varepsilon\delta t, \bar{x}(t + \varepsilon\delta t)),$$

unde ε este suficient de mic ca traiectoria $\{\bar{x}(\theta) \mid \theta \in [t, t + \varepsilon\delta t]\}$ să fie într-o vecinătate convexă a lui (t,x), iar $\bar{u}_{(t,x)}$ să fie continuă pe $[t, t + \varepsilon\delta t]$.
Se obţine

$$0 = f^0(t, x, \bar{u}_{(t,x)}(t)) + S_t(t, x) + \langle f(t, x, \bar{u}_{(t,x)}(t)), S_x(t, x) \rangle .$$

În concluzie.

$$\inf_{v \in U} (f^0(t, x, v) + S_t(t, x) + \langle f(t, x, v), S_x(t, x) \rangle) = 0,$$

care se atinge pentru $v = \bar{u}_{(t,x)}(t)$. Aşadar :

$$S_t(t, x) + \inf_{v \in U} (f^0(t, x, v) + \langle f(t, x, v), S_x(t, x) \rangle) = 0,$$

care este ecuaţia cu derivate parţiale a lui Bellman.

Scanned with OKEN Scanner

Se vede, de asemenea, imediat că

$$S(t, x)|_{s_1^*} = 0,$$

deoarece durata conducerii este 0 şi deci indicele de performanţă este nul.

Introducînd

$$H : R^n \times D \times U \to R^1$$

prin

$$H(p, t, x, v) = f^0(t, x, v) + < p, f(t, x, v) >$$

se numeşte hamiltonianul problemei funcţia

$$H^0 : R^n \times D \to R^1$$

definită de

$$H^0(p, t, x) = \inf_{v \in U} H(p, t, x, v).$$

Atunci se poate scrie ecuaţia lui Bellman în forma Hamilton-Jacobi :

$$S_t(t, x) + H^0(S_x(t, x), t, x) = 0,$$

$$S(t, x)|_{s_1^*} = 0.$$

Se remarcă că H^0 este totdeauna finită dacă U este un compact

3.3. TEOREMA DE SUFICIENŢĂ

TEOREMA 3 (condiţia de suficienţă). *Fie S o funcţie oarecare definită pe D cu valori reale avînd proprietăţile :*

1) *S_t, S_x sînt continue în D, iar S verifică ecuaţia Hamilton-Jacobi în D :*

$$S_t(t, x) + H^0(S_x(t, x), t, x) = 0,$$

$$S(t, x)|_{s_1^*} = 0 ;$$

2) *există o funcție unică,*

$$c : R^n \times D \to U,$$

care realizează minimul global strict al funcției H *în* U, *adică*

$$H^0(p, t, x) = H(p, t, x, c(p, t, x)).$$

Fie introdusă $k : D \to U$ *prin egalitatea*

$$k(t, x) = c(S_x(t, x), t, x);$$

3) $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x, k(t, x))$ *admite o soluție unică pentru orice condiții inițiale date* $(t_0, x_0) \in G$, *soluție situată în întregime în* D *și intersectînd la un moment dat* S_1^*. *Atunci:* $k(t, x)$ *realizează sinteza optimală, adică, dacă* $(t_0, x_0) \in G$, *soluția unică a ecuației de la 3), fiind* $\bar{x}(t)$ *cu* $\bar{x}(t)|_{t=t_0} = x_0$, *comanda optimală corespunzătoare este* $\bar{u}(t) = k(t, \bar{x}(t))$, *unică.*

Observație. Funcția S este o soluție a ecuației lui Bellman în acest caz și nu funcția lui Bellman care exprimă minimul funcționalei atașată indicelui de performanță.

Demonstrație. Fie $v \neq k(t, x)$. Atunci

$$H^0(S_x(t, x), t, x) = H(S_x(t, x)\, t, x, k(t, x)) <$$

$$< H(S_x(t, x), t, x, v)$$

sau

$$0 = S_t(t, x) + H^0(S_x(t, x), t, x) < S_t(t, x) +$$

$$+ H(S_x(t, x), t, x, v).$$

În consecință, fie

$$F : D \times U \to R^1 \text{ continuă,}$$

definită prin

$$F(t, x, v) = S_t(t, x) + H(S_x(t, x), t, x, v).$$

Atunci, pe baza inegalității de mai sus, avem

$$F(t, x, v) \begin{cases} > 0, & v \neq k(t, x), \\ = 0, & v = k(t, x). \end{cases}$$

Să arătăm că

$$\bar{u}(t) = k(t, \bar{x}(t)), \quad t \in [t_0, \bar{t}_1]$$

este comanda optimală.
Are loc relația

$$F(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = F(t, \bar{x}(t), k(t, \bar{x}(t))) = 0.$$

În consecință

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} F(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (S_t(t, \bar{x}(t)) + < S_x(t, \bar{x}(t)), f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) > +$$

$$+ f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \, dt.$$

Deoarece

$$\varphi_{\bar{u}}(t) = < S_x(t, \bar{x}(t)), f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) >$$

este continuă pe porțiuni în $[t_0, \bar{t}_1]$, primii doi termeni ai cantității de sub integrală sînt aproape peste tot egali cu

$$\frac{dS(t, \bar{x}(t))}{dt}.$$

Așadar,

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dS(t, \bar{x}(t))}{dt} \, dt + \int_{t_0}^{\bar{t}_1} f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \, dt.$$

Sau, în final,

$$S(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \, dt,$$

Scanned with OKEN Scanner

căci

$$S(\bar{t}_1, \bar{x}(t_1)) = 0 \ ((\bar{t}_1, \bar{x}(t_1)) \in S_1^*).$$

Să arătăm că nu există o comandă $u^* \in \mathcal{U}(U, D, t_0, x_0, S_1^*)$ cauzînd traiectoria $x^*(t)$ca

$$S(t_0, x_0) > \int_{t_0}^{t_1^*} f^0(t, x^*(t), u^*(t))\, dt,$$

adică

$$\int_{t_0}^{t_1^*} f^0(t, x^*(t), u^*(t))dt - S(t_0, x_0) < 0$$

sau

$$\int_{t_0}^{t_1^*} F(t, x^*(t), u^*(t))\, dt - \int_{t_0}^{t_1^*} (S_t(t,x^*(t)) + < S_x(t, x^*(t)),$$

$$f(t, x^*(t), u^*(t) >)\, dt - S(t_0, x_0) = 0$$

Întrucît $\varphi_{u^*}(t) = S_t(t, x^*(t)) + < S_x(t, x^*(t)), f(t, x^*(t), u^*(t)) >$este continuă pe porţiuni în $[t_0, t_1^*]$ atunci $\varphi_{u^*}(t)$ este egală aproape peste tot cu $\frac{dS(t, x^*(t))}{dt}$ şi se obţine

$$\int_{t_0}^{t_1^*} F(t, x^*(t), u^*(t))\, dt < 0,$$

ceea ce este absurd.

Aşadar, soluţia S a ecuaţiei Hamilton-Jacobi satisface egalitatea

$$S(t, x) = \inf \{J(t, x, u_{(t,x)}) \mid u_{(t,x)} \in \mathcal{U}(U, D, t, x, S_1^*)\},$$

descriind un minim strict.

În fine, să arătăm că $\bar{u}$ este unică pentru orice pereche $(t_0, x_0) \in G$. Să presupunem contrariul, şi anume că există o comandă optimală $\bar{v}$ cauzînd traiectoria optimală $\bar{y}(t)$, $t \in [t_0, \bar{t}_1']$:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(t, \bar{y}, \bar{v}(t)) \text{ cu } \bar{y}(t_0)|_{t=t_0} = x_0.$$

Rezultă imediat, efectuînd aceleaşi calcule ca mai sus, că

$$\int_{t_0}^{\bar{t}_1'} F(t, \bar{y}(t)\ \bar{v}(t))\ \mathrm{d}t = 0.$$

Deoarece $F \geqslant 0$, rezultă

$$F(t,\ \bar{y}(t),\ \bar{v}(t)) = 0.$$

Atunci obligatoriu $\bar{v}(t) = k(t,\ \bar{y}(t))$, c fiind unică şi deci şi k. Da ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\,(t, y, k\,(t, y))\ \text{ cu }\ y(t_0) = x_0$$

are o singură soluţie, şi anume $\bar{x}(t) = \bar{y}(t)$, iar $\bar{t}' = \bar{t}_1$. În definitiv deci

$$\bar{v}(t) = k\ (t,\ \bar{x}\ (t)) = \bar{u}(t).$$

În acest fel, teorema este complet demonstrată.

3.4. SISTEMUL CANONIC

În cele ce urmează vom da o echivalare prin aşa-numitul sistem canonic de ecuaţii diferenţiale ordinare a ecuaţiei cu derivate parţiale a lui Bellman, în maniera Hamilton-Jacobi.

TEOREMA 4. *Fie*

1) *condiţiile teoremei de necesitate*;

2) *există* $c : R^n \times D \to U$ *unică, cu derivate parţiale continue în raport cu* (p, t, x), *astfel ca*

$$H^0(p,\ t,\ x) = H(p,\ t, x, c\ (p, t, x))\,;$$

3) S *are derivate parţiale de ordinul doi continue în* t *şi* x;

4) U *este definită de*

$$g^i(u) \geqslant 0,$$

nnde

$$(\nabla g^i(u))_{1 \leqslant i \leqslant q}$$

sînt liniari, independenţi în U, *neanulîndu-se niciodată în* U;

5) $f^0, f^1, \ldots, f^n$ *au derivate parţiale continue în raport cu* $u^1, \ldots, u^r$, *variabila* u *variind într-o mulţime deschisă care conţine pe* U (*pentru posibilitatea definirii derivatelor parţiale în raport cu* u).

Atunci de-a lungul oricărei traiectorii optimale este valabil sistemul numit canonic

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = H_p^0(\bar{p}(t), t, \bar{x}(t)),$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -H_x^0(\bar{p}(t), t, \bar{x}(t)),$$

unde

$$\bar{p}(t) = S_x(t, \bar{x}(t)).$$

Demonstraţie. Fie pentru fixarea ideilor:

1) $(t_0, x_0) \in G$;

2) $\bar{u}$ — comanda optimală corespunzătoare generînd traiectoria optimală $\bar{x}(t)$ ca soluţie a ecuaţiei

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \bar{u}(t)), \quad \bar{x}(t_0) = x_0;$$

atunci

$$\bar{u}(t) = c(\bar{p}(t), t, \bar{x}(t)).$$

Într-adevăr, conform teoremei 1 de la 3.1,

$$\bar{u}_{(t, \bar{x}(t))} = \bar{u}|_{[t, t_1]}$$

este optimală, adică transportă optimal, în continuare, faza $(t, \bar{x}(t))$ de-a lungul aceleiaşi traiectorii optimale, iniţializate însă în (t_0, x_0).

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, raţionamentul efectuat la teorema de necesitate repetat în faza $(t, \bar{x}(t))$ ne dă

$$\inf_{v \in U} (f^0(t, \bar{x}(t), v) + < S_x(t, \bar{x}(t)), f(t, \bar{x}(t), v) >) = f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) +$$

$$+ < S_x(t, \bar{x}(t)), f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) >$$

şi avînd valoarea $-S_t(t, \bar{x}(t))$, egalitatea de mai sus nefiind scrisă pentru a stabili din nou ecuaţia lui Bellman, ci pentru a pune în evidenţă proprietatea că de-a lungul traiectoriei optimale este valabilă relaţia descrisă de inegalitatea

$$H(S_x(t, \bar{x}(t)), t, \bar{x}(t), v) \geqslant H(S_x(t, \bar{x}(t)), t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) =$$

$$= H^0(S_x(t, \bar{x}(t)), t, \bar{x}(t)) = -S_t(t, \bar{x}(t))$$

pentru orice $v \in U$ şi în orice moment $t \in [t_0, \bar{t}_1]$. Inegalitatea de mai sus mai poartă numele şi de „principiul minimului".

Cum însă minimul este dat de o valoare unică, rezultă imediat că

$$\bar{u}(t) = c(S_x(t, \bar{x}(t)), t, \bar{x}(t)) = c(\bar{p}(t), t, \bar{x}(t)).$$

Să arătăm acum valabilitatea sistemului canonic.

Se va demonstra întîi egalitatea

$$\frac{dx}{dt} = H_p^0(\bar{p}(t), t, \bar{x}(t)).$$

Din

$$H^0(p, t, x) = H(p, t, x, c(p, t, x))$$

rezultă

$$H_p^0(p, t, x) = H_p(p, t, x, c(p, t, x)) + [H_u(p, t, x, c(p, t, x)),$$

$$c_p(p, t, x)]^*) = f(t, x, c(p, t, x)) + [H_u(p, t, x, c(p, t, x)), c_p(p, t, x)].$$

*) [ ] este produsul tensorial.

Conform teoremei lui Kuhn și Tucker, care, datorită condiției 4), se poate aplica în forma lagrangeană, rezultă

a) $H_u(p, t, x, c(p, t, x)) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_u^i(c(p, t, x)) = 0$;

b) $\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, q$;

c) $g^i(c(p, t, x)) \geqslant 0$;

d) $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i g^i(c(p, t, x)) = 0.$

Derivînd egalitatea d) în raport cu p, se obține

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i [g_u^i(c(p, t, x)), c_p(p, t, x)] = 0.$$

Atunci, înmulțind tensorial a) cu $c_p(p, t, x)$, rezultă

$$[H_u(p, t, x, c(p, t, x)), c_p(p, t, x)] = 0.$$

Deci

$$H_p^0(p, t, x) = f(t, x, c(p, t, x)).$$

Atunci pe traiectoria optimală avem

$$H_p^0(\bar{p}(t), t, \bar{x}(t)) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \frac{d\bar{x}}{dt}.$$

Trecem acum la demonstrarea egalității:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = - H_x^0(\bar{p}(t), t, \bar{x}(t)).$$

Din

$$\bar{p}(t) = S_x(t, \bar{x}(t))$$

rezultă

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = S_{xt}(t,\ \bar{x}(t)) + \left[\frac{d\bar{x}}{dt},\ S_{xx}(t, \bar{x}(t))\right] = S_{xt}(t,\ \bar{x}(t)) +$$

$$+ [f\,(t, \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)), S_{xx}(t, \bar{x}(t))\ ].$$

Să considerăm acum ecuaţia Hamilton — Jacobi :

$$S_t(t,\ x) + H^0(S_x(t,\ x)\ t,\ x) = 0.$$

Atunci, prin derivare în raport cu x

$$S_{tx}(t,\ x) + [H^0_p(S_x(t,\ x),\ t,\ x),\ S_{xx}(t,\ x)] + H^0_x(S_x(t,\ x),\ t,\ x) = 0$$

sau ţinînd cont că H^0_p a fost calculat, rezultă

$$S_{tx}(t,\ x) + [f(t,\ x,\ c(S_x(t,\ x),\ t,\ x)),$$

$$S_{xx}(t,\ x)] + H^0_x(S_x\ (t,\ x),\ t,\ x) = 0,$$

de unde pe traiectoria optimală va rezulta

$$-H^0_x(\bar{p}(t),\ t,\ \bar{x}\ (t)) = S_{tx}(t,\ \bar{x}(t)) +$$

$$+ [f(t,\ \bar{x}\ (t),\ \bar{u}(t)),\ S_{xx}(t,\ \bar{x}(t))] = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

şi astfel teorema este complet demonstrată.

3.5. PRINCIPIUL MAXIMULUI

Pe baza celor de mai sus se poate demonstra în ipotezele ultimei teoreme de la 3.4, deci nu în cazul cel mai general sub aspectul condiţiilor (vezi cap. 2), principiul maximului lui Pontreaghin.

Fie introdusă funcţia

$$\mathcal{H} : R^{n+1} \times D \times U \to R^1$$

prin egalitatea

$$\mathcal{H}(\hat{\psi},\ t,\ x,\ u) = \psi_0 f^0\ (t,\ x,\ u) + <\psi,\ f(t,\ x,\ u)>,$$

cu

$$\psi_0 = -1,$$

$$\hat{\psi} = (-1,\ \psi),$$

iar

$$\psi = -\ p.$$

Aşadar,

$$\mathcal{H}(\hat{\psi},\ t,\ x,\ u) = <\hat{\psi}, \hat{f}\ (t,\ x,\ u)\ >,\ \hat{f} = (f^0,\ f).$$

Atunci rezultă

$$\mathcal{H}(\hat{\psi},\ t,\ x,\ u) = -f^0(t,\ x,\ u) - <p, f(t,\ x,\ u)> = -\ H\ (p,\ t,\ x,\ u)$$

şi, în consecinţă, funcţia

$$\mathfrak{M}:\ R^{n+1} \times D \to R^1$$

prin egalitatea

$$\mathfrak{M}(\hat{\psi},\ t,\ x) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\hat{\psi},\ t,\ x,\ u)$$

va fi egală cu

$$-\inf_{u \in U} H\ (p,\ t,\ x,\ u) = -\ H^0(p,\ t,\ x).$$

Ţinînd cont de inegalitatea

$$H(S_x(t,\ \bar{x}(t)),\ t,\ \bar{x}(t),\ v) \geqslant H(S_x(t,\ \bar{x}(t)),\ t,\ \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)) =$$

$$= H^0(S_x(t,\ \bar{x}(t)),\ t,\ \bar{x}(t)) = -\ S_t(t,\ x\ (t)),$$

care are loc în orice moment pe traiectoria optimală şi pentru orice $v \in U$ şi de faptul că $S_x(t, \bar{x}(t)) = \bar{p}(t) = -\bar{\psi}(t)$, se obţine

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x},\ (t),\ v) \leqslant \mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)) =$$

$$= \mathcal{M}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t)) = S_t(t,\ \bar{x}(t)).$$

Cu aceste precizări se poate enunţa şi apoi demonstra în condiţiile teoremei 4

Principiul maximului. De-a lungul oricărei traiectorii optimale care leagă o fază oarecare $(t_0,\ x_0) \in D$ cu varietatea finală S_1^* este valabil principiul maximului, adică

$$\mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)) = \mathcal{M}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t)),\ t \in [t_0,\ \bar{t}_1],$$

şi unde

1) $\hat{\bar{\psi}} = (-1,\ \bar{\psi})$ este o soluţie nebanală a sistemului

$$\frac{d\psi}{dt} = -\mathcal{H}_x(\hat{\bar{\psi}},\ t,\ x,\ u)\Big|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}};$$

2) funcţia φ definită prin

$$\varphi(t) = \mathcal{H}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t),\ \bar{u}(t)) = \mathcal{M}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t)),\ t \in [t_0,\ \bar{t}_1]$$

este continuă şi derivabilă:

$$\frac{d\mathcal{M}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t))}{dt} = \frac{\partial \mathcal{M}(\hat{\bar{\psi}}(t),\ t,\ \bar{x}(t))}{\partial t};$$

3) pe varietatea finală S_1^* are loc condiţia de transversalitate:

$$< (S_t(\bar{t}_1,\ \bar{x}_1),\ \bar{\psi}(t_1)),\ l^* > = 0,$$

unde l^* este orice vector din planul tangent în $(\bar{t}_1, \bar{x}(t_1))$ la suprafața S_1^*.

Demonstrație. Egalitatea $\mathcal{H} = \mathfrak{M}$ de-a lungul traiectoriei optimale a fost demonstrată anterior.

Să arătăm acum că

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = -\mathcal{H}_x(\bar{\psi}, t\ \bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

Într-adevăr

$$\mathcal{H}(\hat{\psi}, t, x, u) = -f^0(t, x, u) + <\psi, f(t, x, u)>,$$

$$\mathcal{H}_x(\hat{\psi}, t, x, u) = -f_x^0(t, x, u) + [\psi, f_x(t, x, u)].$$

Cum $\psi = -p$, iar $p = S_x(t, x)$, se obține

$$\mathcal{H}_x(\hat{\psi}, t, x, u) = -f_x^0(t, x, u) - [S_x(t, x), f_x(t, x, u)].$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial x} < S_x(t, x), f(t, x, u) > = [S_x(t, x), f_x(t, x, u)] + [f(t, x, u), S_{xx}(t, x)],$$

deci

$$[S_x(t, x), f_x(t, x, u)] = < S_x(t, x), f(t, x, u) >_x - [f(t, x, u), S_{xx}(t, x)],$$

de unde, înlocuind în expresia lui $\mathcal{H}_x$, se obține

$$\mathcal{H}_x(\hat{\psi}, t, x, u) = -f_x^0(t, x, u) - < S_x(t, x), f(t, x, u) >_x +$$

$$+ [f(t, x, u), S_{xx}(t, x)] = -H_x(S_x(t, x), t, x, u) + [f(t, x, u), S_{xx}(t, x)].$$

Fie acum ecuația Hamilton-Jacobi:

$$S_t(t, x) + H(S_x(t, x)\ t, x, c(S_x(t, x), t, x)) = 0.$$

Derivînd-o în raport cu x în dependența sa totală de această variabilă, se obține

$$0 = S_{tx}(t, x) + [H_p(S_x(t, x), t, x, c(S_x(t, x), t, x)), S_{xx}(t, x)] +$$

$$+ H_x(S_x(t, x), t, x, c(S_x(t, x), t, x)) + [H_u(S_x(t, x), t, x, c(S_x(t, x), t, x)),$$

$$\nabla_x c(S_x(t, x), t, x)] = S_{tx}(t, x) + [f(t, x, c(S_x(t, x), t, x)), S_{xx}(t, x)] +$$

$$+ H_x(S_x(t, x), t, x, c(S_x(t, x), t, x)),$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece, conform aceleiaşi proceduri de aplicare a teoremei lui Kuhn — Tucher, ultimul produs tensorial este nul. Aşadar,

$$H_x(S_x(t, x), t, x, c(S_x(t, x), t, x)) = -S_{tx}(t, x) +$$
$$+ [f(t, x, c(S_x(t, x), t, x)), S_{xx}(t, x)] = H_x^0(S_x(t, x), t, x),$$

ultima egalitate fiind demonstrată la teorema 4 de la 3.4. Deci, în definitiv,

$$\mathcal{H}_x(\hat{\psi}, t, x, u) \Big|_{\substack{\psi = -S_x(t, x) \\ u = c(S_x(t, x), t, x)}} = -H_x^0(S_x(t, x), t, x).$$

Atunci pe traiectoria optimală avem

$$\mathcal{H}_x(\hat{\psi}, t, x, v) \Big|_{\substack{\psi = \bar{\psi}(t) = -S_x(t, \bar{x}(t)) \\ u = \bar{u}(t) = c(S_x(t, \bar{x}(t)), t, \bar{x}(t))}} = -H_x^0(S_x(t, \bar{x}(t)), t, \bar{x}(t)) = \frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\bar{\psi}}{\mathrm{d}t}$$

şi astfel 1) este complet demonstrat.

Pentru demonstrarea lui 2) se vede că

$$\mathfrak{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t)) = -H^0(S_x(t, \bar{x}(t)), t, \bar{x}(t)) = S_t(t, \bar{x}(t))$$

şi, cum S_t şi $\bar{x}$ sînt funcţii continue, rezultă că şi $\mathfrak{M}$ este continuă în raport cu timpul.

Fie acum

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S_t(t, \bar{x}(t))}{\mathrm{d}t} = S_{tt}(t, \bar{x}(t)) +$$
$$+ < S_{tx}(t, \bar{x}(t)), f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) >.$$

Fie din nou ecuaţia Hamilton-Jacobi :

$$S_t(t, x) + H^0(S_x(t, x), t, x) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci rezultă

$$0 = S_{tt}(t, x) + < H_p^0(S_x(t, x), t, x), S_{tx}(t, x) > + H_t^0(S_x(t, x), t, x) =$$

$$= S_{tt}(t, x) + < f(t, x, c(S_x(t, x), t, x)), S_{tx}(t, x) > + H_t^0(S_x(t, x), t, x).$$

De unde se vede că

$$\frac{d\mathfrak{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t))}{dt} = -H_t^0(S_x(t, \bar{x}(t)), t, \bar{x}(t)) = \frac{\partial \mathfrak{M}(\hat{\bar{\psi}}(t), t, \bar{x}(t))}{\partial t}.$$

În fine, pentru punctul 3)

$$S(\bar{t}_1, \bar{x}(t_1)) = 0,$$

deci varietatea S_1^* este o suprafață de nivel a lui S (t,x) și, în consecință, gradienții sînt coliniari.

Rezultă $(S_t(\bar{t}_1, \bar{x}_1), S_x(\bar{t}_1, \bar{x}_1)) \perp$ planul tangent la S_1^* în $(\bar{t}_1, x_1)$ sau $< (S_t(\bar{t}_1, \bar{x}_1), S_x(\bar{t}_1, \bar{x}_1), l^* > = 0,$
unde l^* este orice vector din planul tangent amintit.
Cu aceasta principiul maximului este complet demonstrat.

3.6. PRINCIPIUL GENERAL AL PROGRAMĂRII DINAMICE

3.6.1. EFICIENȚA PROCESULUI DE CONDUCERE

Așa cum s-a văzut în capitolul 1, mărimile exterioare ale unui obiect orientat sînt clasificate în mărimi:

a) *de intrare*, prin care în mod deliberat se poate interveni asupra funcționării sistemului;

b) *de ieșire*, care caracterizează în general parametrii de funcționale ai sistemului;

c) *perturbatoare*, a căror intervenție asupra funcționării sistemului este necontrolabilă, modul de variație al acestora fiind întîmplător.

Esențial în desfășurarea procesului de conducere și implicit în corelarea care există între mărimile menționate mai sus este va-

riația acestora în timp, adică reprezentarea mărimilor respective ca funcții de timp. În consecință, se introduc *spațiile de funcții*:

$\mathfrak{X}_i$ — spațiul mărimilor de acționare, în care x_i este elementul generic;

$\mathfrak{X}_e$ — spațiul mărimilor de ieșire, în care x_e este elementul generic;

$\mathfrak{X}_p$ — spațiul mărimilor perturbatoare, în care x_p este elementul generic.

Adică

$$\mathfrak{X}_i = \{x_i\}, \quad \mathfrak{X}_e = \{x_e\}, \quad \mathfrak{X}_p = \{x_p\}.$$

Spațiile astfel introduse sînt spații de funcții de o variabilă reală, luînd valori respectiv în cîte un spațiu real euclidian, adică avînd valori vectoriale, spațiile diferind evident numai ca dimensiune, care *este impusă de numărul mărimilor de intrare, ieșire și perturbatoare*, deci pentru orice $t \in R^1$

$$x_i(t) \in R_i, \quad x_e(t) \in R_e, \quad x_p(t) \in R_p,$$

unde R_i, R_e, R_p sînt spațiile euclidiene reale menționate mai sus, de dimensiuni α, β și, respectiv, γ. Dată fiind precizarea de mai sus, rezultă

$$\mathfrak{X}_i = \overset{\alpha}{\underset{r=1}{\times}} \mathfrak{X}_i^r, \quad \mathfrak{X}_e = \overset{\beta}{\underset{j=1}{\times}} \mathfrak{X}_e^j, \quad \mathfrak{X}_p = \overset{\gamma}{\underset{k=1}{\times}} \mathfrak{X}_p^k,$$

iar

$$x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^\alpha), \text{ cu } x_i^r \in \mathfrak{X}_i^r, \; r = 1,2, \ldots, \alpha,$$

$$x_e = (x_e^1, \ldots, x_e^\beta), \text{ cu } x_e^j \in \mathfrak{X}_e^j, \; j = 1,2, \ldots, \beta,$$

$$x_p = (x_p^1, \ldots, x_p^\gamma), \text{ cu } x_p^k \in \mathfrak{X}_p^k, \; p = 1,2, \ldots, \gamma,$$

și pentru orice $t \in R^1$

$$x_i(t) = (x_i^1(t), \ldots, x_i^\alpha(t)), \text{ cu } x_i^r(t) \in R^1, \; r = 1,2, \ldots, \alpha,$$

$$x_e(t) = (x_e^1(t), \ldots, x_e^\beta(t)), \text{ cu } x_e^j(t) \in R^1, \; j = 1,2, \ldots, \beta,$$

$$x_p(t) = (x_p^1(t), \ldots, x_p^\gamma(t)), \text{ cu } x_p^k(t) \in R^1, \; k = 1,2, \ldots, \gamma.$$

Scanned with OKEN Scanner

Topologia spațiilor $\mathfrak{X}_c$, $\mathfrak{X}_e$ și $\mathfrak{X}_p$ este generată de o metrică definită în sensul distanței a două funcții definite pe aceeași mulțime și având valori vectoriale. Corelația dintre elementele x_i, x_e și x_p este descrisă de

$$T : \mathfrak{X}_i \times \mathfrak{X}_p \to \mathfrak{X}_e,$$

o aplicație care formalizează, conform cu o anumită legitate fizică, evoluția mărimilor de ieșire ale sistemului:

$$x_e = T(x_i, x_p) \in \mathfrak{X}_e.$$

Operatorul T definește de fapt o clasă de operatori al cărui reprezentant generic este, fixarea precisă a acestuia făcîndu-se de obicei prin cunoașterea uneia sau mai a multor valori oarecare a funcției x_e.

Dependența temporală va fi scrisă

$$x_e(t) = T(x_i, x_p)(t) \in R_e,$$

relație care formalizează în același timp procesul de conducere.

Fiind vorba de o evoluție în timp a mărimilor care intervin, aceasta se reflectă imediat în spațiul funcțiilor x_i, x_e, x_p. Suportul funcțiilor menționate se află în semidreapta pozitivă a spațiului R^1, în majoritatea cazurilor fiind un segment, procesul de conducere durînd un timp finit.

Eficiența momentană a procesului de conducere este măsurată printr-un indice momentan de performanță, introdus prin funcția

$$\mu : R^1 \times R_e \times R_i \to R^1, \mu \in C^{(k)}, k \geqslant 0,$$

avînd în fiecare moment t valoarea

$$\mu(t, x_e(t), x_i(t)) = \mu(t, T(x_i, x_p)(t), x_i(t)).$$

Interesantă este însă eficiența globală, definită ca funcție de mulțime și funcțională:

$$G : I_+ \times C^{(k)} \to R^1,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$I_+ = \{[t_1, t_2\,] \mid 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2\},$$

avînd valoarea

$$G([t_1, t_2], \mu o(\ , x_e, x_i)) = G([t_1, t_2], \mu o(\ , T(x_i, x_p), x_i)),$$

unde compunerea $\mu o(\ , x_e, x_i)$ defineşte funcţia de timp $\mu(t, x_e(t), x_i(t))$ pentru t în intervalul de conducere.

Această eficienţă globală depinde de durata intervalului de conducere ca funcţie de mulţime, precum şi de eficienţa momentană, considerată funcţie de timp, ca funcţională. Se menţionează că în cazul intervalelor finite de conducere este interesantă evoluţia mărimilor x_i şi x_p numai în acest interval, cu toate că variaţia lor în timp este în general prelungibilă în mod natural. Efectuarea operaţiei de conducere este supusă, de regulă, restricţiilor atît în ce priveşte mărimile de acţionare, cît şi cele de ieşire. Aceasta conduce la considerare de submulţimi de variaţie în R_i şi R_e, pe care le definim corespunzător prin $R_i^* \subset R_c$ şi $R_e^* \subset R_e$, în general mulţimi compacte cu interior nevid. În mod corespunzător rezultă subspaţiile de funcţii $\mathfrak{X}_c^*$ şi $\mathfrak{X}_e^*$. În consecinţă, un proces de conducere are loc într-un interval de timp de obicei finit, $[t_0, t_1]$, conţinut în suportul funcţiilor x_i, x_e, x_p, ale căror valori pentru $(x_i, x_e) \in \mathfrak{X}_i^* \times \mathfrak{X}_e^*$ sînt obligate să aparţină mulţimilor compacte R_i^* respectiv R_e^*, eficienţa momentană fiind $\mu o(\ , T(x_i, x_p), x_i)$, iar cea globală

$$G([t_0, t_1], \mu o(\ , T(x_c, x_p), x_c)).$$

De reţinut că

$$x_e(t_0) = T(x_i, x_p)\,(t_0),$$

$$x_e(t_1) = T(x_i, x_p)\,(t_1)$$

indică valorile iniţiale şi finale ale mărimilor de ieşire. În cazul cînd evoluţia mărimilor perturbatoare este determinată, fiind o funcţie cunoscută de timp, punctele $x_e(t_0)$ şi $x_e(t_1)$ din R_e^* pot fi considerate ca aparţinînd unor varietăţi netede V_0 şi V_1, adică

$$V_0 = \{x \in R_e^* \mid g_1(x) = \cdots = g_{q_0}(x) = 0\,, \nabla g_1(x), \cdots$$

$$\cdots, \nabla g_{q_0}(x), \text{ liniar independente}\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

V_1 se definește analog, indicele q_0 devenind q_1, iar varietățile avînd interiorul vid : $1 \leqslant q_0,\ q_1 \leqslant \alpha$.

Evident, un caz interesant este cel în care $q_0 = q_1 = \alpha$, adică în care $x_\varepsilon(t_0) = x_{\varepsilon 0}$, $x_\varepsilon(t_1) = x_{\varepsilon 1}$, $x_{\varepsilon 0}$ și $x_{\varepsilon 1}$ fiind impuse. În general apar mai des următoarele stări inițiale și finale, exprimate cartezian :

1) $\{x_{\varepsilon 0}\} \times \{t_0\}$, stare inițială ; $\{x_{\varepsilon 1}\} \times R^1$, stare finală,

adică se impun punctul și momentul inițial și punctul final, durata, fiind oarecare ;

2) $\{x_{\varepsilon 0}\} \times \{t_0\}$, stare inițială ; $V_1 \times R^1$, stare finală,

adică se impune punctul și momentul inițial și o suprafață q_1 — dimensională de sosire, intervalul de conducere rezultînd ;

3) $\{x_{\varepsilon 0}\} \times \{t_0\}$, stare inițială ; $R^*_\varepsilon \times \{t_1\}$, stare finală,

adică se impune punctul și momentul inițial, precum și durata procesului de conducere.

Eficiența generală a unui proces de conducere se supune, de regulă, următoarelor axiome :

A_I. Oricare ar fi $t \in [t_0, t_1)$, $\delta t > 0$, există $R : R^2 \to R^1$ monotonă în y și $\varepsilon > 0$, astfel încît

$$G([t, t_1], \mu o(\ , T(x_i, x_p), x_i) \mid [t, t_1]) =$$

$$= R(G([t, t + \varepsilon\delta t], \mu o(\ , T(x_i, x_p), x_i) \mid_{[t, t+\varepsilon\delta t]}), G([t + \varepsilon\delta t, t_1],$$

$$\mu o(\ , T(x_i, x_p), x_i) \mid_{[t+\varepsilon\delta t, t_1]})) + 0(\varepsilon), \text{cu} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{0(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

unde :

a) $R(x(\varepsilon) + 0(\varepsilon), y(\varepsilon)) = R(x(\varepsilon), y(\varepsilon)) + 0(\varepsilon)$;

b) $R(0, y) = y$.

A_{II}. Există $\varphi : R^2 \to R^1$ astfel ca :

$$G([t, t + \varepsilon\delta t], \mu o(\ , T(x_i, x_p), x_i) \mid_{[t, t+\varepsilon\delta t]}) =$$

$$= \varphi(\mu(t, T(x_i, x_p)(t), x_i(t)), \varepsilon\delta t) + 0(\varepsilon)$$

și unde încă

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\mu, \varepsilon \delta t) = 0.$$

Introducînd aplicația

$$E : R^1 \times R^1 \times R_e^* \times P(R_e^*) \times X_c \to R^1,$$

definită de relația

$$E(t, t_1, x_e(t), V_1, x_i) = G([t, t_1], \mu o(\ , T(x_i, x_p), x_i)_{|[t, t_1]})),$$

în care se vede că varietatea inițială este redusă la un punct, eficiența procesului devine funcție de primele patru variabile, fiind o funcție de punct de primele trei, interesante fiind prima și a treia variabilă.

Se va considera pentru moment că nu se ține seama de efectul lui x_p. Atunci, cumulînd axiomele A_I și A_{II} și folosind aplicația E, rezultă.

$$E(t, t_1, x_e(t), V_1, x_i|_{[t, t_1]}) = R(\varphi(\mu(t, T(x_i)(t), x_i(t)), \varepsilon \delta t),$$

$$E(t + \varepsilon \delta t, t_1, x_e(t + \varepsilon \delta t), V_1, x_i|_{[t+\varepsilon \delta t, t_1]})) + 0(\varepsilon),$$

relație care formalizează împreună axiomele A_I și A_{II}.

Din cele relatate mai sus a rezultat în ce constă descrierea generală a unui proces de conducere și măsurarea eticienței acestuia. Rămâne de elucidat în cele ce urmează în ce constă scopul unui proces de conducere.

3.6.2. OPTIMIZAREA UNUI PROCES DE CONDUCERE

Noțiunea de optimalitate este legată de noțiunea de joc, iar formalizarea ei se face de obicei prin forma normală a jocului în schema „unul contra tuturor". Continuînd să ignorăm efectul mărimii x_p, optimalitatea implică extremizarea funcției de cîștig a jocului, care în cazul de față este valoric definită de

$$E(t_0, t_1, x_e(t_0), V_1, x_i|_{[t_0, t_1]}).$$

Scanned with OKEN Scanner

În consecinţă, se va nota

$$\underset{x_i|[t,\,t_1]}{\mathcal{O}}\ (E(t,\,t_1,\,x_e(t),\,V_1,\,x_i|_{[t,\,t_1]})) =$$

$$= \underset{\text{(sau sup)}}{\inf}\ \{E(t,\,t_1,\,x_e(t),\,V_1,\,x_i|_{[t,\,t_1]}) \mid x_i|_{[t,\,t_1]} \in \mathfrak{X}_i^*\}$$

operaţia $\underset{x_i|[t,\,t_1]}{\mathcal{O}}$ reflectînd operaţia de optimizare.

Aşadar, aceasta constă în găsirea unei comenzi $\bar{x}_i \in \mathfrak{X}_i^*$ numită optimală, care implică extremizarea (inferioară sau superioară) a eficienţei globale. Să considerăm pentru o anumită comoditate a expunerii şi dintr-un anumit tradiţionalism al programării dinamice că starea iniţială şi finală a procesului de conducere este de tipul 3 menţionat.

Atunci, evident,

$$\underset{x_i|[t,\,t_1]}{\mathcal{O}}\ (E(t,\,t_1,\,x_e(t),\,V_1,\,x_i|_{[t,\,t_1]})) = E_0(t,\,x_e(t))$$

unde E_0 este o funcţie definită pe $R^1 \times R_e$ cu valori reale.

Deci

$$E_0(t_0,\,x_e(t_0)) = E(t_0,\,t_1,\,x_e(t_0),\,V_1,\,\bar{x}_i).$$

iar

$$E_0(t,\,x_e(t)) = \underset{x_i|[t,\,t+\varepsilon\delta t)\cup[t+\varepsilon\delta t,\,t_1]}{\mathcal{O}}\ (R(\varphi(\mu(t,\,T(x_i)\,(t),\,x_i(t)),\,\varepsilon\delta t),$$

$$E(t+\varepsilon\delta t,\,t_1,\,x_e(t+\varepsilon\delta t),\,V_1,\,x_i|_{[t+\varepsilon\delta t,\,t_1]})) + 0(\varepsilon)).$$

Deoarece R este monotonă în raport cu variabila a doua, rezultă imediat:

$$E_0(t,\,x_e(t)) = \underset{x_i|[t,\,t+\varepsilon\delta t)}{\mathcal{O}}\ (R(\varphi(\mu(t,\,T(x_i)\,(t),\,x_i(t)),\,\varepsilon\delta t),$$

$$\underset{x_i|[t+\varepsilon\delta t,\,t_1]}{\mathcal{O}}\ (E(t+\varepsilon\delta t,\,t_1,\,x_e(t+\varepsilon\delta t),$$

$$V_1,\,x_i|_{[t+\varepsilon\delta t,\,t_1]}))) + 0(\varepsilon)) =$$

$$= \underset{x_i|[t,\,t+\varepsilon\delta t)}{\mathcal{O}}\ (R(\varphi(\mu(t,\,T(x_i)\,(t),\,x_i(t)),\,\varepsilon\delta t),\,E_0(t+\varepsilon\delta t,\,x_e(t+\varepsilon\delta t))) + 0(\varepsilon)).$$

Această relaţie este fundamentală în caracterizarea unui proces de conducere optimală.

Consideraţiile făcute pînă acum nu au reclamat proprietăţi de analiticitate. Acestea sînt legate, de regulă, de descrierea cu ajutorul algoritmului diferenţial a procesului de conducere optimală.

Relaţiile deduse, în speţă ultima, conţin în mod evident caracterul de continuitate al procesului de conducere în ceea ce priveşte desfăşurarea acestuia în timp. Aceasta se explică în primul rînd prin faptul că descrierea analitică a funcţionării unei instalaţii oarecare cu ajutorul legilor fizice care o guvernează este aproape în toate cazurile făcută într-o manieră continuă. Este, aşadar, normal a se aborda întîi problema conducerii optimale, în care strategia de conducere este continuă.

3.6.3. NOŢIUNEA DE STRATEGIE CONTINUĂ

În acest caz, noţiunea de strategie este legată, evident, de mărimea de intrare $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^z)$, ale cărei componente explicitate sînt, din punct de vedere matematic intrinsec, funcţii analitice pe intervale deschise consecutive. Ceea ce face ca problemele de conducere optimală să difere esenţial din punct de vedere matematic de problemele variaţionale clasice constă, în esenţă, în proprietatea de analiticitate pe porţiuni a mărimilor x_e şi x_e. După cum este ştiut, o mărime de acţionare descrisă de o singură funcţie (vectorială) analitică reprezintă o strategie banală, fiind de fapt proprie teoriei proceselor de conducere convenţionale, în speţa teoriei clasice a sistemelor automate.

Rezolvarea problemelor de conducere optimală a arătat că mărimile de acţionare corespunzătoare procesului optim sînt analitice pe porţiuni, fapt care permite asimilarea acestora cu strategia unui joc în formă poziţională, fiecare porţiune de analiticitate constînd într-o mutare a partenerului activ. În cazul proceselor de conducere convenţionale, mărimea de acţionare, fiind o singură funcţie analitică, face ca din punct de vedere poziţional acestea să fie descrise de jocuri cu o singură mutare, de unde rezultă de altfel şi o anumită sărăcie a posibilităţilor acestor procese. Aceasta este de fapt şi o explicaţie mai de profunzime a superiorităţii în posibilităţi a sistemelor automate cu eşantionare faţă de cele continue.

Scanned with OKEN Scanner

O formă elegantă de descriere a procesului optimal continuu se obţine considerînd

$$R(x, y) = x + y, \quad x, y \text{ variabile reale},$$

adică o formă bilinară în variabilele x şi y.

În acest caz,

$$E_0(t, x_e(t)) = \underset{x_i|_{[t,\, t+\varepsilon\delta t)}}{\mathcal{O}} (\varphi(\mu(t, T(x_i)(t), x_i(t)), \varepsilon\delta t) +$$

$$+ E_0(t + \varepsilon\delta t, x_e(t + \varepsilon\delta t)) + o(\varepsilon)).$$

Considerînd funcţiile E_0, φ şi x_e simplu analitice, rezultă

$$E_0(t, x_e(t)) = \underset{x_i|_{[t,t+\varepsilon\delta t]}}{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial}{\partial\mu}\varphi(\mu(t, T(x_i)(t), x_i(t)), 0)\,\varepsilon\delta t + E_0(t, x_e(t)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t} E_0(t, x_e(t))\,\varepsilon\delta t + < \nabla_{x_e} E_0(t, x_e(t)), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_e(t) > \varepsilon\delta t + 0(\varepsilon)\right).$$

Introducînd funcţia

$$g^0(\,, x_e, x_i) = \frac{\partial}{\partial\mu}\varphi(\mu, 0),$$

împărţind cu $\varepsilon\delta t$ şi făcînd $\varepsilon \to 0$ avem

$$\underset{x_i(t)}{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial}{\partial t} E_0(t, x_e(t)) + g^0(t, x_e(t), x_i(t)) + < \nabla_{x_e} E_0(t, x_e(t)), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_e(t) > \right) = 0$$

sau, în definitiv,

$$\underset{x_i(t)}{\mathcal{O}} \left(g^0(t, x_e(t), x_i(t)) + < \nabla_{x_e} E_0(t, x_e(t)), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_e(t) > \right) = -\frac{\partial}{\partial t} E_0(t, x_e(t)).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia cu derivate pariale obţinută, în care E_0 este funcţia necunoscută, este ecuaţia generală a procesului de conducere optimală în cazul cînd R admite o reprezentare biliniară.

Se remarcă faptul că în cazul de faţă intervine prima derivată a mărimilor de ieşire, ceea ce sugerează în mod natural comoditatea folosirii formei normale a unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare în cazul în care operatorul T admite o reprezentare prin operatorii diferenţiali.

Să presupunem, aşadar, că sistemul condus este susceptibil de reprezentarea

$$F^1\left(t, x_e^1, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{p_1^1}}{\mathrm{d}t^{p_1^1}} x_e^1, \ldots, x_e^\beta, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{p_\beta^1}}{\mathrm{d}t^{p_\beta^1}} x_e^\beta, x_i^1, \ldots, \right.$$

$$\left. \frac{\mathrm{d}^{q_1^1}}{\mathrm{d}t^{q_1^1}} x_i^1, \ldots, x_i^\alpha, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{q_\alpha^1}}{\mathrm{d}t^{q_\alpha^1}} x_i^\alpha \right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^\beta\left(t, x_e^1, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{p_1^\beta}}{\mathrm{d}t^{p_1^\beta}} x_e^1, \ldots, x_e^\beta, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{p_\beta^\beta}}{\mathrm{d}t^{p_\beta^\beta}} x_e^\beta, x_i^1, \ldots, \right.$$

$$\left. \frac{\mathrm{d}^{q_1^\beta}}{\mathrm{d}t^{q_1^\beta}} x_i^1, \ldots, x_i^\alpha, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{q_\alpha^\beta}}{\mathrm{d}t^{q_\alpha^\beta}} x_i^\alpha \right) = 0.$$

De menţionat că rezolvarea sistemului de mai sus poate introduce şi distribuţii.

Reducînd la forma normală sistemul de mai sus în ipoteza soluţionării algebrice în raport cu derivatele în ordin cel mai înalt ale funcţiilor $x_e^1, \ldots, x_e^\beta$, se obţine

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} = f^1(t, x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} = f^n(t, x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^r)$$

Scanned with OKEN Scanner

Această formă a descrierii „dinamicii" sistemului condus permite rescrierea într-o manieră mai elegantă a ecuației cu derivate parțiale a procesului de conducere optimală.

Se reamintește că variabilele $x^1, \ldots, x^n$ definesc spațiul fazelor X, iar $u^1, \ldots, u^r$ sînt localizate într-o parte compactă U a spațiului R^r.

$$X = \{x \mid x = (x^1, \ldots, x^n),\ x^i \in R^1,\ i = 1, \ldots, n\} = R^n,$$

$$U = \{u \mid u = (u^1, \ldots, u^r), \text{ în prezența restricțiilor}\} \subset R^r.$$

Variabilele astfel introduse vor fi menținute și în cazul discret, care se va trata la punctul 1.4. Se menționează de asemenea faptul că compacitatea mulțimii U, diferită de întreg spațiul euclidial R^r, scoate din clasa problemelor variaționale clasice rezolvarea problemei de conducere optimală.

În general se întîlnesc mai rar probleme în care apar restricții în spațiul fazelor, totuși acestea se pot întîlni chiar în cazuri banale, atunci cînd intervin durate ale mărimilor de acționare, mărimile de acționare fiind supuse la restricții.

Introducînd

$$f : R^1 \times X \times U \to X$$

prin

$$f = (f^1, \ldots, f^n),$$

se obține formalizarea „dinamicii" obiectului condus:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u),$$

în care

f este continuă pe $R^1 \times X \times U$,

$\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}$ sînt continue pe $R^1 \times X \times U$.

În ceea ce privește indicele global de performanță prin care se măsoară eficiența globală a procesului, acesta este de forma

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^\circ(t, x(t), u(t))\, dt = E(t_0, t_1, V_0, V_1, u_{|[t_0, t_1]}),$$

în care integrantul este de aceeaşi analiticitate cu funcţiile $f^1, \ldots, f^n$. Se vede imediat că

$$E(t, t_1, x(t), V_1, u|_{[t,t_1]}) = \int_t^{t+\varepsilon\delta t} f^0(\tau, x(\tau), u(\tau))\,d\tau +$$

$$+ E(t + \varepsilon\delta t, t_1, x(t + \varepsilon\delta t), u|_{[t+\varepsilon\delta t, t_1]}) =$$

$$= f^0(t, x(t), u(t))\ \varepsilon\delta t + E(t + \varepsilon\delta t, t_1, x(t + \varepsilon\delta t),$$

$$u|_{[t+\varepsilon\delta t, t_1]}) + 0(\varepsilon).$$

Astfel definiţia eficienţei globale se încadrează în cazul tratat mai sus, şi anume

$$R(x, y) = x + y,$$

funcţia φ fiind explicitată multiplicativ cu factorul $\varepsilon\delta t$: $\varphi = f^0\varepsilon\delta t$. În aceste condiţii, particularizate în fond în raport cu forma generală a problemei de optimalitate, se obţine

$$\underset{u(t)}{\mathcal{O}}\,(f^0(t, x(t), u(t)) + <\nabla_x E_0(t, x(t)), f(t, x(t), u(t))>) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} E_0(t, x(t)).$$

Ecuaţia obţinută se poate scrie şi într-o formă asemănătoare cu ecuaţia Hamilton-Jacobi. Introducînd

$\mathcal{H}(t, p, x, u) = f^0(t, x, u) + <p, f(t, x, u)>$, unde $p = (p_1, \ldots, p_n)$,

după care rezolvînd problema de programare matematică reprezentată de

$$\underset{u}{\mathcal{O}}\,(\mathcal{H}(t, p, x, u)),$$

se obține soluția

$$u = C(t, p, x).$$

Se notează

$$\mathcal{H}^0(t, p, x) = \mathcal{H}(t, p, x, C(t, p, x))$$

și se obține în definitiv, în forma Hamilton-Jacobi, ecuația procesului de conducere optimală

$$\mathcal{H}^0(t, \nabla_x E_0, x) = -\frac{\partial}{\partial t} E_0(t, x),$$

prin a cărei soluționare se determină $E_0 \to \nabla_x E_0 = p$, comanda optimă fiind de forma

$$u = C(t, \nabla_x E_0(t, x), x) = u(t, x).$$

Rezultatul obținut, cel puțin formal prin faptul că nu s-a abordat problema condițiilor de rezolvabilitate a ecuației menționate, arată că un proces de conducere optimal impune realizarea unui sistem de conducere în circuit închis, adică prezența unei legături inverse.

Revenind acum la relația fundamentală care caracterizează un proces de conducere optimal și presupunînd simpla analiticitate a funcțiilor care intervin, se obține

$$E_0(t, x_e(t)) = \underset{x_i|_{[t,\, t+\varepsilon\delta t)}}{\mathcal{O}} \Big(R\Big(0 + \frac{\partial}{\partial \mu}\varphi(\mu(t, x_e(t), x_i(t)), 0)\,\varepsilon\,\delta t +$$

$$+ 0(\varepsilon), E_0(t, x_e(t)) + \langle \nabla_{x_e} E_0(t, x_e(t)),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_e(t) \rangle \varepsilon\,\delta t + 0(\varepsilon)) + 0(\varepsilon)\Big) = R(0, E_0(t, x_e(t))) +$$

$$+ \underset{x_i|_{[t,\, t+\varepsilon\delta t)}}{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial}{\partial x} R(0, E_0(t, x_e(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \varphi(\mu(t, x_e(t), x_i(t)), 0 \right) \varepsilon \delta t +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} R(0, E_0(t, x_e(t))) (< \nabla_{x_e} E_0(t, x_e(t)),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_e(t) > + \frac{\partial}{\partial t} E_0(t, x_e(t))) \varepsilon \delta t + 0(\varepsilon))$$

sau, în definitiv, trecînd la limită după împărţirea cu $\varepsilon \delta t$, pentru $\delta \to 0$ se obţine

$$\underset{x_i(t)}{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial}{\partial x} R(0, E_0(t, x_e(t)) \frac{\partial}{\partial \mu} \varphi(\mu(t, x_e(t), x_i(t)), 0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} R(0, E_0(t, x_e(t))) < \nabla_{x_e} E_0(t, x_e(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_e(t) > \right) =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial y} R(0, E_0(t, x_e(t))) \frac{\partial}{\partial t} E_0(t, x_e(t)),$$

care este de fapt ecuaţia generală cu derivate parţiale a procesului optimal. Evident, ea poate fi imediat retranscrisă în forma

$$\underset{u(t)}{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial}{\partial x} R(0, E_0(t, x(t))) f^0(t, x(t), u(t)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} R(0, E_0(t, x(t))) < \nabla_x E_0(t, x(t)), f(t, x(t), u(t)) > \right) =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial y} R(0, E_0(t, x(t))) \frac{\partial}{\partial t} E_0(t, x(t)).$$

în cazul cînd dinamica obiectului condus este descrisă în forma diferenţială normală.

Se observă că în acest caz nu se poate găsi o formalizare de tip Hamilton-Jacobi, datorită faptului că hamiltonianul ipotetic care s-ar defini ar conține funcția necunoscută E.

Se menționează că soluțiile ecuației de tip Hamilton — Jacobi care descriu un proces de conducere optimal sînt analitice pe porțiuni, definind o mărime de acționare analitică pe porțiuni, adică avînd caracterul unei strategii poziționale.

În încheiere, referitor la modul de luare în considerare a mărimii perturbatoare, se va reveni la 3.6.5.

3.6.4. NOȚIUNEA DE STRATEGIE DISCRETĂ

Introducerea strategiilor discrete a fost condiționată în general, de doi factori.

Primul factor este legat de teoria transmiterii și prelucrării informației, iar al doilea de procedeele calculatorii de reductibilitate a proceselor continue la procese discrete, acest factor fiind încadrabil matematic în teoria sistemelor cu diferențe finite și a adaptabilității acestora limbajului modern al calculatoarelor numerice. Se poate menționa că în genere există foarte puține instalații tehnice a căror descriere să fie prin esență discretă. Majoritatea problemelor de esență discretă în care apar procese de extremizare nu sînt încadrabile în mod natural în sfera problemelor de conducere optimală propriu-zisă a instalației tehnice și țin de problema de conducere economică sau de jocuri cu toți partenerii activi.

Operația de discretizare se descrie matematic printr-o relație de recurență, care, scrisă direct în spațiul fazelor și al compactului U, este de forma

$$x(k+1) = g(k, x(k), u(k)),$$

exprimînd de fapt un lanț cu o singură legătură. Aparent matematic nu se impune nici o condiție de analiticitate și în mod natural singurele proprietăți pe care trebuie să le aibă funcția g trebuie să fie legate de proprietățile topologice ale produsului cartezian $X \times U$. Întrucît prin mărimea u se realizează conducerea, o primă proprietate naturală este cea de continuitate a funcției g pe mulțimea compactă U, pentru a avea asigurată atingerea extremului diferitelor funcții care se compun cu g, extremul aparținînd mulțimii U. În vederea punerii în evidență a prezenței extremului prin analizarea

efectului abaterii de la acesta, se impune şi continuitatea în raport cu variabila x. Aşadar, în final, în mod natural funcţia g trebuie să fie continuă pe produsul cartezian $X \times U$. O proprietate oarecum echivalentă analiticităţii, care, aşa cum se va vedea mai tîrziu, reflectă proprietăţi asemănătoare, este cea de convexitate, în cazul de faţă în raport cu variabila u. Astfel, în dezvoltarea principiului maximului pentru sistemele discrete, proprietatea de convexitate va fi introdusă însă abia după ce se vor fi epuizat consideraţiile rezultate din proprietatea de continuitate. Soluţionarea problemei de conducere optimală discretă furnizează strategia de conducere sub forma unui şir : $(u(k))_{k \in N}$.

Această strategie nu este însă echivalentul direct al strategiei jocului poziţional continuu, întrucît fiecare porţiune de analiticitate a strategiei continue este ea însăşi discretizată. Aşa că de fapt, echivalentul discret al strategiei poziţionale continue se defineşte pe $\mathfrak{L}(\{u(k) \mid k \in N\})$, fiecare reprezentare discretă a unei porţiuni de analiticitate a strategiei continue fiind un element din $\mathfrak{L}(\{u(k) \mid k \in N\})$. Aplicarea efectivă a unei strategii discrete ridică problema comportării instalaţiei între două acţionări succesive, problemă care pînă în prezent a fost rezolvată numai în cadrul teoriei sistemelor eşantionate liniare cu ajutorul transformatei z — modificat.

Trebuie de asemenea menţionată existenţa unor strategii discrete în care fiecare eşantion reprezintă de fapt o mutare în jocul de optimizare. Aceasta este cazul sistemelor eşantionate cu timp tranzitoriu finit, a căror teorie se construieşte în bună parte cu ajutorul teoriei ecuaţiilor polinomiale.

Să formalizăm acum principial conducerea cu ajutorul strategiilor discrete.

Notînd cu k numărul total de paşi, eficienţa va fi reprezentată de

$$E(k, x(0), \ldots, x(k), u(0), \ldots u(k-1)),$$

unde în acest caz E este o funcţie definită pe

$$\bigcup_{i=0}^{k} (\{i\} \times \underset{i+1}{X} X \times \underset{i}{X} U)$$

cu valori reale.

Introducînd funcţia $E_0 : N \times X \to R^1$ prin

$$E_0(i, x(i)) = \inf_{(\text{sau sup})} \{E(i, x(i), \ldots, x(k), u(i), \ldots, u(k-1)) \mid u(i), \ldots, u(k-1) \in U\},$$

relaţia fundamentală care caracterizează procesul de conducere optimală discretă devine

$$E_0(i, x(i)) = \underset{u(i)}{\mathcal{Q}} (R(\psi(i, x(i), u(i)), u(i)), E_0(i+1, x(i+1))), 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Aceasta din urmă se obţine cu uşurinţă din relaţia corespunzătoare cazului continuu, în care ψ reprezintă de fapt compunerea $\varphi o \mu$. Ţinînd cont de „dinamica" obiectului condus, rezultă în definitiv

$$E_0(i, x(i)) = \underset{u(i)}{\mathcal{Q}} (R(\psi(i, x(i), u(i)), E_0(i+1, g(i, x(i), u(i)))), 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Această relaţie este fundamentală în caracterizarea procesului de conducere discret.

Ea este scrisă în limbajul programării dinamice care de fapt a fost creată pentru rezolvarea problemelor de conducere generală discretă. Cazul continuu tratat în programarea dinamică serveşte în mare măsură ca suport teoretic, din punct de vedere al teoriei conducerii optimale, calculului variaţional clasic.

Forma de scriere discretă prezentată mai sus are avantajul relaţiei de recurenţă, care de fapt permite folosirea calculatoarelor numerice.

3.6.5. CONSIDERAREA INFLUENŢEI MĂRIMILOR PERTURBATOARE

În consideraţiile făcute anterior am ignorat voit influenţa mărimilor perturbatoare asupra desfăşurării procesului de conducere. Se impune astfel a considera cele expuse la punctele 3 şi 4 ca încadrîndu-se într-un caz deterministic, care, evident, poate îngloba şi cazul influenţei mărimilor perturbatoare cînd evoluţia acestor este

deterministic cunoscută. În cazul general însă, x_p descrie un proces stohastic, ceea ce impune ca întreg procesul de conducere să fie descris de un proces stohastic, iar eficiența globală, definită anterior la punctul 1.1, să devină o variabilă aleatoare. Pentru a preciza ideile, se consideră $(E, \mathfrak{K}, P)$ un cîmp de probabilitate complet aditiv, iar x_p se definește prin $x_p: E \times R^1 \to R_p$ unde $x_p(\ , t)$ este o variabilă aleatoare vectorială pentru orice $t \in R^1$. Ținînd cont de operatorul T, $x_e = T(x_i, x_p)$ devine de asemenea un proces stohastic. Pentru ca eficiența globală să aibă un caracter bine determinat, după cum se cunoaște, eliminarea caracterului aleator, respectiv dependența de cîmpul E, se face printr-o operație de medie în probabilitate. Adică eficiența globală va fi

$$\widetilde{E}(t_0, t_1, x_e(t_0), V_1, x_i | [t_0, t_1]) =$$

$$M(\psi(E(\xi, t_0, t_1, x_e(t_0), V_1, x_i | [t_0, t_1]))) =$$

$$= \int_E \psi(E(\xi, t_0, t_1\ x_e(t_0), V_1, x_i | [t_0, t_1]))\, \mathrm{d}P(\xi),$$

ψ fiind o funcție continuă sau în general, măsurabilă Lebesque. Pentru a nu complica expunerea, ψ va fi considerată funcția identică. În acest caz, $\widetilde{E}$ este momentul de ordinul unu al variabilei aleatoare $E(\xi,)$. Cum operația de medie este o integrală în probabilitate, se va considera cazul cînd eficiența globală este exprimată printr-o integrală, iar operatorul T este descris în forma normală a unui sistem de ecuații diferențiale ordinare:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x, u, z),$$

unde z este echivalentul mărimii perturbatoare, fiind un proces stohastic.

În consecință

$$E(\xi, t_0, t_1, x(t_0), u|_{[t_0, t_1]}) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(\xi, t), u(t))\, \mathrm{d}t$$

sau, în general,

$$E(\xi, t, t_1, x(t), u|_{[t, t_1]}) = \int_t^{t_1} f^0(\theta, x(\xi, \theta), u(\theta))\, \mathrm{d}\theta.$$

Să presupunem că $x(\xi, \theta)$ este un proces cu creşteri independente, adică pentru orice $t^{(1)} < \ldots < t^{(k)}$, $x(\ , t^{(2)}) - x(\ , t^{(1)}), \ldots$ $\ldots, x(, t^{(k)}) - x(, t^{(k-1)})$ sînt variabile aleatoare independente Steinhaus-Kac. Rezultă

$$f_x(x^{(2)}, t^{(2)} \mid x^{(1)}, t^{(1)}) = f_{\Delta x}(\Delta x(t^{(1)}, t^{(2)}), t^{(1)}, t^{(2)}) = \Psi(\Delta x \mid t^{(1)}, x^{(1)}),$$

unde $f_{\Delta x}$ este densitatea de repartiţie a creşterii, *fiind cunoscută* :

$$M(E(\xi, t, t_1, x(t), u|_{[t, t_1]})) = M\left(\int_t^{t+\varepsilon\delta t} f^0(\theta, x(\xi, \theta), u(\theta))\, d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_{t+\varepsilon\delta t}^{t_1} f^0(\theta, x(\xi, \theta), \mu(\theta)) d\theta\right).$$

Punînd

$$\underset{u|[t, t_1]}{\mathcal{O}}(M(E(\xi, t, t_1, x(t), u_{[t, t_1]}))) = \underset{u|[t, t_1]}{\mathcal{O}}(\widetilde{E}(t, t_1, x(t), u|_{[t, t_1]})) = \widetilde{E}_0(t, x(t)),$$

rezultă deci

$$\widetilde{E}_0(t, x(t)) = \underset{u(t)}{\mathcal{O}}(f^0(t, x, (t), u(t))\, \varepsilon\delta t +$$

$$+ \int_{X(\Delta x)} \widetilde{E}_0(t + \varepsilon\delta t, x(t) + \Delta x)\, \psi(\Delta x \mid t, x(t))\, d\omega(\Delta x)) + 0(\varepsilon),$$

unde $\psi(\Delta x \mid t, x(t))$ este densitatea de repartiţie condiţionată, iar $x(t + \varepsilon\, \delta\, t) = x(t) + \Delta x$.

Rezultă atunci

$$\widetilde{E}_0(t + \varepsilon\delta t, x + \Delta x) = \widetilde{E}_0(t, x) + \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E}_0\, \varepsilon\delta t +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\widetilde{E}_0\, \Delta x^i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{E}_0\, \varepsilon^2\, \delta t^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^j}\widetilde{E}_0\, \Delta x^i\, \Delta x^j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x^i}\widetilde{E}_0\, \varepsilon\delta t\, \Delta x^i + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\widetilde{E}_0(t, x) = \underset{u}{\mathcal{O}}\Big(f^0(t, x, u)\,\varepsilon\delta t + \widetilde{E}_0(t, x) + \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E}_0\,\varepsilon\delta t +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\widetilde{E}.\int_{X(\Delta x)}\Delta x^i\,\psi(\Delta x|t, x)\,d\omega(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{E}_0\,\varepsilon^2\delta t^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\widetilde{E}_0 \times \int_{X(\Delta x)}\Delta x^i\,\Delta x^j\,\psi(\Delta x|\,t, x)\,d\omega(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x^i}\widetilde{E}_0\,\varepsilon\delta t\int_{X(\Delta x)}\Delta x^i\,\psi(\Delta x|\,t, x)\,d\omega(x) + \ldots\Big).$$

Punînd

$$\int_{X(\Delta x)}\Delta x^i\,\psi(\Delta x|\,t, x)\,d\omega(x) = a^i(t, x, u)$$

$$\int_{X(\Delta x)}\Delta x^i\,\Delta x^j\,\psi(\Delta x|\,t, x)\,d\omega(x) = a^{ij}(t, x, u),$$

a^i, a^{ij} fiind funcţii continue, rezultă prin împărţirea cu $\varepsilon\,\delta\,t$ şi făcînd $\varepsilon \to 0$

$$\underset{u}{\mathcal{O}}\,(f^0(t, x, u) + \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\widetilde{E}_0 + \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x^i}\widetilde{E}_0\Big)a^i(t, x, u) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\widetilde{E}_0\Big)a^{ij}(t, x, u)) = -\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E}_0.$$

Aceasta reprezintă ecuaţia cu derivate parţiale a procesului condus.

Trebuie remarcat că modelul de tratare abordat mai sus referitor la considerarea influenţei mărimilor perturbatoare nu are pretenţia de a avea un caracter de generalitate, aşa cum în bună parte se poate realiza în cazul conducerii deterministice. De asemenea o serie de

lucrări destul de recente abordează cazuri particulare de conducere în care aspectul probabilistic este mult complicat. Totuşi trebuie subliniat că nivelul de abordare făcut numai în cazul continuu, suferă o limitare creată de însăşi teoria analitică a proceselor stohastice, în speţă teoria Chapman-Kolmogorov. În cazul discret, pe care nu am avut intenţia de a-l aborda, posibilităţile de generalizare sînt mai mari.

3.6.6. PRINCIPIUL GENERAL AL OPTIMALITĂŢII

A. Cazul continuu

Fie relaţia fundamentală

$$E_0(t,x_e(t)) = \underset{x_i(t)}{\mathcal{O}}(R(\varphi(\mu(t,x_e(t),\ x_i(t)),\ \varepsilon\delta t),\ E_0(t+\varepsilon\delta t,\ x_e(t+\varepsilon\delta t)))) + o(\varepsilon).$$

Aceasta exprimă o relaţie de recurenţă locală între eficienţele $E_0(t+\varepsilon\delta t,\ x_e(t+\varepsilon\delta t))$ şi $E_0\ (t,\ x_e(t))$.

Cu alte cuvinte, determinarea lui $E_0(t,\ x_e(t))$ se face în funcţie de valoarea eficienţei $E_0(t+\varepsilon\delta t,\ x_e(t+\varepsilon\delta t))$, care $\varepsilon\delta t$ — succedă temporal, în sensul desfăşurării procesului de conducere, eficienţa optimă $E_0(t,\ x_e(t))$ care se doreşte a fi determinată.

Mărimea de acţionare optimă se determină de asemenea pe baza unei programări matematice local temporale în funcţie de condiţiile momentane şi de cele care $\varepsilon\delta t$ — succedă temporal momentul considerat. Cu alte cuvinte, calitatea de optimalitate „se propagă" de la momentul considerat spre sfîrşitul procesului de conducere optimală.

Se poate enunţa acum următoarea

TEOREMĂ *Fie un proces de conducere optimală care decurge în intervalul* $[t_0,\ t_1]$. *Pentru orice* $\delta t > 0$ *există* $\varepsilon > 0$, *astfel încît procesul considerat să fie optim referitor numai la intervalul* $[t_0+\varepsilon\delta t,\ t_1]$.

Demonstraţie. Fie $\bar{x}_i$ şi $\bar{x}_e$ mărimile de intrare şi de ieşire optimale. Atunci, pe baza relaţiei fundamentale menţionate mai sus corespunzătoare procesului de conducere optimală, rezultă

$$E_0(t_0,\bar{x}_e(t_0)) = R(\varphi(\mu(t_0,\bar{x}_e(t_0),\bar{x}_i(t_0)),\ \varepsilon\delta t),\ E_0(t_0+\varepsilon\delta t,\ \bar{x}_e(t_0+\varepsilon\delta t))) + o(\varepsilon).$$

Să presupunem prin absurd că $x_t|_{[t_0+\varepsilon\delta t,\ t_1]}$ nu este mărime de acţionare optimală referitoare la procesul de conducere iniţializat în $\bar{x}_e(t_0+\varepsilon\delta t)$. Fie această mărime $\bar{\bar{x}}_t|_{[t_0+\varepsilon\delta t,\ t_1]}$, iar eficienţa optimă $E_0'(t_0+\varepsilon\delta t,\ \bar{x}_e(t_0+\varepsilon\delta t))$, are loc evident relaţia*)

$$E_0'(t_0+\varepsilon\delta t,\ \bar{x}_e(t_0+\varepsilon\delta t)) > E_0(t_0+\varepsilon\delta t,\ \bar{x}_e(t_0+\varepsilon\delta t)).$$

Cum în acest caz R este monoton crescătoare, rezultă

$$R(\varphi(\mu(t_0, \bar{x}_e(t_0), \bar{x}_t(t_0)),\ \varepsilon\delta t),\ E_0'(t_0+\varepsilon\delta t, \bar{x}_e(t_0+\varepsilon\delta t))) \geqslant$$

$$\geqslant R(\varphi(\mu(t_0, \bar{x}_e(t_0), \bar{x}_t(t_0)),\ \varepsilon\delta t),\ E_0(t_0+\varepsilon\delta t, \bar{x}_e(t_0+\varepsilon\delta t))).$$

Pot apărea două cazuri :

a) Dacă R este *strict monotonă*, atunci, cu notaţiile introduse, rezultă

$$R(\varphi, E_0') > R(\varphi, E_0).$$

Considerînd un $\varepsilon > 0$ suficient de mic, avem

$$R(\varphi, E_0') + o(\varepsilon) > R(\varphi, E) + o(\varepsilon),$$

adică, considerînd procesul de conducere iniţializat în $\bar{x}_e(t_0)$ sub acţiunea mărimii $\hat{x}_t$, definită prin

$$\hat{x}_t(t) = \begin{cases} \bar{x}_t(t),\ t \in [t_0,\ t_0+\varepsilon\delta t), \\ \bar{\bar{x}}_t(t),\ t \in [t_0+\varepsilon\delta t,\ t_1], \end{cases}$$

cu $\varepsilon > 0$ suficient de mic, aceasta are o eficienţă mai mare decît cel optimal, adică condus pin $\bar{x}_t$, ceea ce este absurd.

b) Dacă R este numai *monotonă*, atunci se ajunge la rezultatul dorit în cazul relaţiei de egalitate $R(\varphi, E_0') = R(\varphi, E_0)$, folosind o condiţie de unicitate locală referitor la mărimea de intrare $\bar{x}_t$, fapt care suplimentează însă axiomatica conducerii.

De remarcat că rezultatul teoremei nu afirmă că, dacă un proces este optimal pe $[t_0,\ t_1]$, atunci este optimal pe orice interval

*) În acest caz, $\mathcal{O} \equiv \sup$.

$[t, t_1]$ cu $t \in (t_0, t_1)$. Acest lucru, după cum se va arăta în cele ce urmează, este valabil în cazul eficienţelor descrise de funcţionale.

Pentru aceasta să considerăm procesul descris de

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u),$$

iar eficienţa prin

$$J_{[t_0, t_1]} = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\, dt.$$

Procesul iniţializat în $x(t_0)$ este optimal sub acţiunea comenzii $\bar{u}(t)$, descriind traiectoria $\bar{x}(t)$. Fie $\theta \in (t_0, t_1)$. Să considerăm că, referitor la intervalul $[\theta, t_1]$, procesul iniţializat în $\bar{x}(\theta)$ sub acţiunea comenzii $\bar{u}|_{[\theta, t_1]}$ nu este optimal. Comanda optimală va fi $\bar{\bar{u}}|_{[\theta, t_1]}$. Aşadar,

$$\int_{\theta}^{t_1} f^0(t, \bar{\bar{x}}(t), \bar{\bar{u}}(t))\, dt > \int_{\theta}^{t_1} f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))dt.$$

Adăugînd ambilor membri

$$\int_{t_0}^{\theta} f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, dt,$$

rezultă

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\ dt > J_{[t_0, t_1]},$$

unde

$$\hat{u}(t) = \begin{vmatrix} \bar{u}(t),\ t \in [t_0,\ \theta) \\ \bar{\bar{u}}(t),\ t \in [\theta, t_1] \end{vmatrix} \text{ şi } \hat{x}(t) = \begin{vmatrix} \bar{x}(t),\ t \in [t_0,\ \theta), \\ \bar{\bar{x}}(t);\ t \in [\theta, t_1]. \end{vmatrix}$$

Cu alte cuvinte, eficienţa sub acţiunea comenzii $\hat{u}$ este mai bună, ceea ce este absurd.

Demonstraţia, după cum s-a văzut, are la bază faptul că în acest caz funcţionala este aditivă.

Scanned with OKEN Scanner

B. Cazul discret

Un rezultat analog se obține și în cazul discret. În acest caz, dacă R, este strict monotonă în y, se poate enunța următoarea

TEOREMĂ *Dacă* $(\bar{u}(i))_{0\leqslant i\leqslant k-1}$ și $(x(i))_{0\leqslant i\leqslant k}$ *sînt comanda și traiectoria optimală, eficiența optimă fiind* $E_0(k,\bar{x}(0),\ldots,\bar{x}(k),\bar{u}(0),\ldots,\bar{u}(k-1))$, *atunci procesul considerat inițializat în* $\bar{x}(1)$ *este de asemenea optimal.*

Demonstrarea acestei teoreme se va face cînd va fi abordată problema programării dinamice la capitolul 4 al primei părți.

În acest caz însă, aplicînd principiul inducției, rezultă că orice porțiune din traiectoria optimală, între momentele i și k, $0<i<k$, este de asemenea optimală.

Avînd în vedere considerațiile de mai sus, care afectează noțiunea de optimalitate în sensul că aceasta se referă la momentele ce urmează în desfășurarea procesului de conducere și nu la cele precedente, se poate enunța așa-numitul

Principiul al optimalității. Determinarea unui proces de conducere optimală la un moment dat, adică decizia care trebuie luată în acel moment în sensul unei desfășurări optimale a acestuia, se face în exclusivitate în funcție de condițiile locale și nu depinde de istoria pînă la acest moment a desfășurării procesului.

Acest principiu a fost formulat pentru prima dată de către R. Bellman, creatorul programării dinamice.

În cazul de față, aceasta decurge din axiomele A_I și A_{II} ale unui proces de conducere.

3.6.7. CONCLUZII

În cele expuse în paragrafele precedente s-a încercat să se formalizeze în mod unitar aspectele generale ale problemei conducerii optimale. Sînt de menționat în acest sens cîteva observații care privesc în ansamblu cele tratate anterior.

Optimalitatea, fiind o noțiune globală, privește comportarea sistemului în întreg intervalul de conducere, cu alte cuvinte reclamă cunoașterea operatorului T, ceea ce este echivalent cu cunoașterea dinamicii sistemului condus. Problema cunoașterii operatorului T constituie, în fond, problema centrală a identificării proceselor.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd această dinamică nu este cunoscută sau se determină corespunzător unor intervale de testare, optimalitatea este comod să se transforme într-o problemă locală a conducerii. Astfel a apărut noţiunea de extremizare momentană, proprie aşa-numitor sisteme extremale, care în fiecare moment, printr-o operaţie de căutare conform cu un anumit principiu, îşi extremizează eficienţa momentană. Este cazul să menţionăm, că deşi extremizarea inferioară a unei eficienţe este improprie, am folosit-o pentru a nu introduce o altă noţiune corespunzătoare.

În concluzie, atunci cînd operaţia de conducere poate fi aprioric determinată, cunoscîndu-se proprietăţile obiectului condus, noţiunea de optimalitate este raţional să fie folosită. În caz contrar se pătrunde în sfera unor sisteme automate.

Din punct de vedere matematic, problema determinării unei conduceri optimale se poate face pe două căi mari. Prima cale foloseşte determinarea funcţiei E_0 ($\tilde{E}_0$) ca soluţie a unei ecuaţii cu derivate parţiale, apoi indirect a mărimii de acţionare optimală. Din această categorie fac parte metodele de rezolvare a ecuaţiei cu derivate parţiale a lui Bellman sau rezolvarea ecuaţiei Hamilton-Jacobi în maniera lui Kalman. A doua cale are la bază teoria matematică modernă a optimalităţii creată de L.S. Pontreaghin şi fundată pe aşa-numitul principiu al maximului. Tot aici se încadrează procesele de discretizare şi de rezolvabilitate prin metoda programării dinamice. Aparent, ca formulare, problemele de conducere optimală par a fi încadrabile în problemele variaţionale clasice. Totuşi, în special problemele legate de optimizarea prin rapiditate nu pot fi rezolvate prin formalismul Euler-Lagrange, cu toate că este cazul să menţionăm că există o pretinsă demonstraţie prin metode variaţionale clasice ale principiului maximului în special şi a cărei falsitate este menţionată de însuşi Pontreaghin. Atît în prima cale de rezolvare a problemelor de conducere optimală, cît şi în a doua, după cum se va vedea, apare problema unei programări matematice locale, exprimată de operatorul $\mathcal{O}$. Aici apare deosebirea esenţială între problemele clasice şi cele moderne de optimizare. În cazul cînd operaţia exprimată prin operatorul $\mathcal{O}$ este realizabilă prin derivare, adică analitic, problema de optimalitate poate fi încadrată în domeniul variaţional clasic. În caz contrar, problema devine încadrabilă în metodele neclasice. Există şi aici unele situaţii de compromis, cauzate de unele aspecte particulare ale procedeului de optimizare locală, în speţă de programare matematică. Aceasta se manifestă prin faptul că extremul

Scanned with OKEN Scanner

neanalitic este totuși analitic în raport cu o parte din variabile, în timp ce restul sînt situate deja pe frontiera compactului R_c^*. În raport cu acele variabile, formalismul clasic este valabil, ceea ce creează impresia construirii unei metode universale variaționale pe porțiuni.

Așadar, din punctul de vedere al unui aspect extremal, procesul de optimizare este în fond o succesiune de programări matematice. În cazul discret al problemelor de conducere cu număr impus de pași, acestea se pot reduce la o problemă de programare matematică cu $k \times n$ variabile, unde k este numărul de pași și n dimensiunea spațiului fazelor. Sînt elaborate în acest sens o serie de metode care se aplică cu succes. Se pune întrebarea dacă determinarea lui $\bar{x}_c$ și E_0 ca formulare, fiind asemănătoare programării matematice, nu se poate încadra într-o teorie a programării matematice la nivelul spațiilor de funcții și nu la nivelul spațiilor geometrice. Pînă în prezent astfel de probleme nu au putut fi rezolvate, întrucît rezultatele analizei funcționale sînt legate de topologia spațiilor, avînd structură analogă cu spațiile geometrice. Trecînd la nivelul spațiilor de funcții, apar dificultăți destul de greu de depășit. Un exemplu l-ar constitui diferența dintre teorema Bolzano-Weierstrass, corespunzătoare spațiilor geometrice, și teorema Arzella-Ascoli, în cazul spațiilor de funcții. În ultimul caz se vede că condiția de mărginire la nivelul topologiei respective nu este suficientă pentru compacitate.

Atît în cazul clasic, cît și în cel neclasic, liniaritatea joacă un rol important, pus în evidență în special în aspectul principiului optimalității atunci cînd eficiența globală este o funcțională liniară. Cu toate că aparent și în cazul cînd eficiența este neliniară se poate ajunge la o formalizare de oarecare eleganță , în cazul luării în considerație a mărimilor perturbatoare, atunci cînd acestea se descriu printr-un proces stohastic, apare obligativitatea considerării eficienței globale printr-o funcțională liniară. Aceasta rezidă în primul rînd în aceea că suprimarea dependenței de cîmpul de evenimente se face printr-o operație de medie care este o integrală în probabilitate. În fine, trebuie menționat că această operație de integrare în cazul proceselor continue îmbracă în general două aspecte și anume : în cazul proceselor stohastice staționare, operația de integrare se referă la determinarea corelației, conducînd în final la teoria lui Wiener. În cazul general al descrierii analitice a proceselor stohastice continue, relația fundamentală Chapman-Kolmogorov este de asemenea o expresie integrală. În cazul discret, din acest punct de

vedere există mai puţine restricţii, aceasta în primul rînd datorită faptului că procesele discrete se pot descrie la nivelul topologiei spaţiilor geometrice.

În fine, trebuie semnalat un fapt esenţial. Aparent, problema de optimalitate, cel puţin în formularea ei, nu ridică problema considerării aspectului liniar sau neliniar. Ar părea că există o separaţie între teoria proceselor optimale şi un alt domeniu extrem de vast, cu multe rezultate interesante, reprezentat de teoria proceselor neliniare, şi în speţă de teoria stabilităţii mişcărilor. Cu toate acestea, considerînd un proces de conducere optimală condus printr-o anumită strategie şi introducînd o stabilizare prin reacţie referitor la perturbarea traiectoriei, se ajunge la un rezultat extrem de interesant, exprimat prin aceea că eficienţa este o funcţie Leapunov.

Actualmente încep să se construiască o serie de astfel de teorii care realizează joncţiunea dintre problemele de optimalitate şi cele de stabilitate neliniară.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 4 SISTEME LINIARE AUTONOME OPTIMIZATE ÎN FUNCȚIE DE RAPIDITATE

4.1. INTRODUCERE. FORMULAREA PROBLEMEI

Fie sistemul liniar

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

unde

a) A este 0 $n \times n$-matrice;

b) B — 0 $n \times r$-matrice;

c) $u \in U \subset R^r$;

d) U — un poliedru convex, conținînd originea spațiului R^r, aceasta nefiind localizată însă în nici unul dintre vîrfurile poliedrului U. În consecință, dacă originea se află pe frontiera poliedrului, atunci ea se găsește în mod obligatoriu în interiorul unei muchii sau a unei fețe.

Dîndu-se condiția inițială

$$x(0) = x_0$$

și o comandă $u \in \mathcal{U}(U)$, unde $\mathcal{U}(U)$ este mulțimea funcțiilor continue pe porțiuni cu valori în U, soluția unică a sistemului este

$$x(t) = X(t)\left(x_0 + \int_0^t X^{-1}(\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau\right),$$

iar X matricea fundamentală, cu $X(0) = E$.

Evident, sistemul fiind autonom nu se restrînge cu nimic, generalitatea considerînd momentul inițial $t = 0$.

Considerînd sistemul asociat

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^T \psi$$

și notînd cu ψ matricea fundamentală a acestuia, cu $\psi(o) = E$, atunci, după cum este cunoscut,

$$\Psi^T(t) = X^{-1}(t)$$

și deci

$$x(t) = X(t)\left(x_0 + \int_0^t \Psi^T(\tau)\, Bu(\tau) d\tau\right),$$

formă care exprimă combinat răspunsul sistemului liniar inițializat în x_0 $(t = 0)$ sub acțiunea comezii $u \in \mathcal{U}(U)$.

Să considerăm acum un punct oarecare $x_0 \neq 0$ din spațiul $X = R^n$. Atunci notăm

$$\Sigma(x_0, U) = \{u \in \mathcal{U}(U) \mid x_0 \text{ este condus în origine}\},$$

iar timpul de sosire se va nota $t_1 > 0$.

Se presupune că

$$\Sigma(x_0, U) \neq \emptyset.$$

Problema de optim se enunță astfel: să se găsească $\bar{u} \in \Sigma(x_0, U)$ astfel încît timpul sosirii în origine $\bar{t}_1$ să fie cel mai mic, adică

$$\bar{t}_1 = \inf \{t_1 | u \in \Sigma(x_0, U)\}.$$

Se va nota cu $\bar{\Sigma}(x_0, U)$ totalitatea comenzilor optimale. Putem presupune, lucru care se va demonstra de altfel, că, dacă $\Sigma(x_0, U) \neq \emptyset$, atunci și $\bar{\Sigma}(x_0, U) \neq \emptyset$, lucru evident dacă $\Sigma(x_0 U)$ este finită.

Funcţionala este în cazul optimizării în funcţie de rapiditate

$$J(u) = \int_0^{t_1} 1 \, dt,$$

adică

$$f^0 = 1.$$

În acest caz vom avea

$$\mathcal{H}(\hat{\psi}, x, u) = \psi_0 f^0 + < \psi, Ax + Bu > = \psi_0 + \psi^T Ax + \psi^T Bu$$

şi unde

$$\frac{d\psi}{dt} = - \nabla_x \mathcal{H} = - A^T \psi.$$

Întrucît U este un compact, operaţia sup. se transformă în max şi, ţinînd seama de expresia lui $\mathcal{H}(\hat{\psi}, x, u)$, principiul maximului se exprimă prin

$$\max_{\in U} \psi^T Bu$$

sau, mai în detaliu, prin următoarea condiţie de *necesitate*: dacă $\bar{u} \in \Sigma(x_0, U)$ este o comandă optimală, atunci există o soluţie nebanală $\bar{\psi}$ a sistemului asociat, astfel încît pentru orice $t \in [0, \bar{t}_1]$ este valabilă inegalitatea

$$\bar{\psi}^T(t) B\bar{u}(t) \geqslant \bar{\psi}^T(t) Bv$$

pentru orice $v \in U$. În cele ce urmează se va înţelege prin principiul maximului inegalitatea de mai sus. Se vede imediat că, pentru un $t \in [0, \bar{t}_1]$, $\bar{u}(t)$ satisface programul liniar

$$\varphi_t(v) = \bar{\psi}^T(t) Bv,$$

cu $v \in U$ şi deci valorile $\bar{u}(t)$ se găsesc pe frontiera poliedrului convex U.

Scanned with OKEN Scanner

Se va nota

$$\widetilde{\Sigma}(x_0, U) = \{u \in \Sigma(x_0, U) \mid \text{există } \psi(t) \text{ nebanală astfel} \\ \text{încît } u \text{ satisface principiul maximului}\}.$$

Întrucît principiul maximului este prin esenţă o condiţie de necesitate, rezultă că

$$\overline{\Sigma}(x_0, U) \subset \widetilde{\Sigma}(x_0, U)$$

şi prin urmare pe baza consideraţiilor apriorice de mai sus

$$\widetilde{\Sigma}(x_0, U) \neq \emptyset.$$

Se spune că Y este un subspaţiu invariant al lui A dacă

1) $\{O_{R^n}\} \neq Y \subsetneq X$;

2) $Ay \in Y$ pentru orice $y \in Y$.

Dacă Y este un subspaţiu invariant al lui A, atunci pentru orice $y \in Y$ vectorii

$$y, Ay, \ldots, A^{n-1}y$$

sînt liniar dependenţi. Într-adevăr, să presupunem contrarul, şi anume că există un $y_0 \in Y$ astfel ca $y_0, Ay_0, \ldots, A^{n-1}y_0$ să fie liniar independenţi, formînd deci o bază a lui X. Fie $y_* \in X$ ca $y_* \notin Y$. Atunci

$$y_* = \lambda^0 y_0 + \lambda^1 Ay_0 + \ldots + \lambda^{n-1} A^{n-1} y_0,$$

dar $\lambda^0 y_0 + \lambda^1 Ay_0 + \ldots + A^{n-1}y_0 \in Y$ şi deci $y_* \in Y$, ceea ce este absurd.

Reciproc. Dacă există un vector y_0 astfel ca $y_0, Ay_0, \ldots, A^{n-1}y_0$ să fie liniar dependenţi, atunci y_0 aparţine unui subspaţiu invariant Y al lui A. Se poate scrie evident

$$y_0 = \lambda^1 Ay_0 + \ldots + \lambda^{n-1} A^{n-1} y_0,$$

presupunînd că $\lambda^1, \ldots, \lambda^{n-1} \neq 0$. Fie

$$Y = \{y = \lambda^1 Ay_0 + \ldots + \lambda^{n-1} A^{n-1} y_0 \mid \lambda^1, \ldots, \lambda^{n-1} \in R^1\}.$$

Se vede că

$$\{O_{R^n}\} \neq Y \subsetneq X;$$

atunci

$$Ay_0 = \lambda^1 A^2 y_0 + \ldots + \lambda^{n-2} A^{n-1} y_0 + \lambda^{n-1} A^n y_0,$$

deci

$$A^n y_0 = Ay_0 - \lambda^1 A^2 y_0 - \ldots - \lambda^{n-2} A^{n-1} y_0 \in Y$$

ori

$$A y_0 + \lambda^1 A^2 y_0 + \ldots + \lambda^{n-2} A^{n-1} y_0 \in Y.$$

În consecință, Ay_0, care este suma celor două expresii, va aparține și el lui Y. Deci Y este subspațiu invariabil.

În cele ce urmează se va presupune că, oricare ar fi vectorul w paralel cu o muchie a poliedrului U, vectorii

$$Bw, ABw, \ldots, A^{n-1} Bw$$

sînt liniar independenți, adică Bw nu aparține nici unui subspațiu invariant al lui A.

Se recunoaște imediat că, dacă sistemul este complet controlabil, condiția de mai sus este imediat satisfăcută.

Fie ψ o soluție nebanală a sistemului

$$\frac{d\psi}{dt} = - A^T \psi,$$

considerată în intervalul $[t', t'']$, cu $t' < t''$. Dacă există un vector $\xi \neq 0$ astfel încît pentru orice $t \in (t', t'')$, $< \psi(t), \xi > = \psi^T(t)\xi$, atunci ξ aparține unui subspațiu invariant Y a lui A. Într-adevăr, fie

$$Y = \{y \mid \psi^T(t)\, y = O,\ t \in (t', t'')\}.$$

Evident, $Y \neq \{O\}$ și $Y \neq X$, întrucît $\psi^T(t) \perp Y$ pentru orice $t \in (t', t'')$, adică

$$\{O_{R^n}\} \neq Y \subsetneq X.$$

Fie $y \in Y$ şi $\dfrac{\mathrm{d}\psi^T(t)}{\mathrm{d}t} = -\psi^T(t)A$, de unde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi^T(t)\,y) = -\psi^T(t)\,Ay\,.$$

Cum însă $\psi^T(t)\,y$ este nulă pe o mulţime deschisă, rezultă că şi derivata va fi nulă, adică $\psi^T(t)\,Ay = O$ sau $Ay \in Y$. Această proprietate va fi de multe ori folosită în cele ce urmează. În fine, să considerăm x o soluţie a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + Bu$$

şi ψ o soluţie nebanală a sistemului asociat. Atunci, din

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi^T(t)\,x(t)) = \frac{\mathrm{d}\psi^T}{\mathrm{d}t}x(t) + \psi^T(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\psi^T(t)\,Ax(t) +$$

$$+\psi^T(t)\,Ax(t) + \psi^T(t)\,Bu(t) = \psi^T(t)\,Bu(t)\,,$$

aproape peste tot, rezultă că pentru două momente oarecare de timp $t' \leqslant t''$ are loc relaţia

$$\psi^T(t'')\,x(t'') - \psi^T(t')\,x(t') = \int_{t'}^{t''} \psi^T Bu\,(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

4.2. CONDIŢII DE SUFICIENŢĂ

În cele ce urmează se va arăta că, în conformitate cu principiul maximului, este valabilă următoarea

TEOREMĂ

$$\widetilde{\Sigma}(x_0, U) \subset \overline{\Sigma}(x_0, U)\,.$$

Demonstraţie. Fie $\tilde{u} \in \Sigma(x_0, U)$. Să presupunem că $\tilde{u}$ nu este o comandă optimală. Există atunci o comandă $u_* \in \Sigma(x_0, U)$ astfel încît timpul de conducere t_{1*} este strict mai mic decît $\tilde{t}_1$,

timpul de conducere al comenzii $\tilde{u}$: $t_{1*} < \tilde{t}_1$. Fie $\tilde{\psi}$ o soluție nebanală, astfel încît

$$\tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t) \leqslant \tilde{\psi}^T(t)\, Bv \quad v \in U,\ t \in [0, \tilde{t}_1]\,.$$

Cum $v = 0 \in U$, rezultă că

$$\tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t) \geqslant 0\,, \quad t \in [0, \tilde{t}_1]\,.$$

Fie acum $\tilde{x}(t)$ și $x_*(t)$ traiectoriile cauzate de $\tilde{u}(t)$, respectiv $u_*(t)$. Atunci

$$\tilde{\psi}^T(\tilde{t}_1)\,\tilde{x}(\tilde{t}_1) - \tilde{\psi}^T(t_{1*})\,\tilde{x}(t_{1*}) = \int_{t_{1*}}^{\tilde{t}_1} \tilde{\psi}^T B\tilde{u}(t)\,\mathrm{d}t$$

și, cum $\tilde{x}(\tilde{t}_1) = 0$, rezultă

$$\tilde{\psi}^T(t_{1*})\,\tilde{x}(t_{1*}) = -\int_{t_{1*}}^{\tilde{t}_1} \tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0,\ (\tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t) \geqslant 0).$$

Pe de altă parte însă,

$$\tilde{\psi}^T(t_{1*})\,\tilde{x}(t_{1*}) = \tilde{\psi}^T(t_{1*})\,\tilde{x}(t_{1*}) - \tilde{\psi}^T(0)\,x_0 - (\tilde{\psi}^T(t_{1*})\,x_*(t_{1*}) - \tilde{\psi}^T(0)\,x_0) =$$

$$= \int_0^{t_{1*}} \tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_{1*}} \tilde{\psi}^T(t)\, Bu_*(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{t_{1*}} (\tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t) - \tilde{\psi}^T(t)\, Bu_*(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Dar cum, evident,

$$\tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t) \geqslant \tilde{\psi}^T(t)\, Bu_*(t)$$

sau

$$\tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t) - \tilde{\psi}^T(t)\, Bu_*(t) \geqslant 0\,,$$

rezultă

$$\tilde{\psi}^T(t_{1*})\,\tilde{x}(t_{1*}) \geqslant 0\,.$$

Așadar,

$$\tilde{\psi}^T(t_{1*})\,\tilde{x}(t_{1*}) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

şi deci

$$\int_{t_{1*}}^{\tilde{t}_1} \tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t)\, dt = 0 \quad \text{cu} \quad \tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t) \geqslant 0\,,$$

adică

$$\tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t) = 0 \quad \text{pe} \quad (t_{1*}, \tilde{t}_1)\,.$$

Deoarece $\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}(x_0, U)$, rezultă că

$$\tilde{\psi}^T(t)\, B\tilde{u}(t) = \max_{v \in U} \tilde{\psi}^T(t)\, Bv = 0 \quad \text{pentru orice } t \in (t_{1*}, \tilde{t}_1).$$

Deoarece O nu este într-un vîrf al poliedrului, ci este localizat într-un subpoliedru (muchie, faţă), rezultă că pentru orice $t \in (t_{1*}, \tilde{t}_1)$ programul liniar

$$\max_{v \in U} \tilde{\psi}^T(t)\, Bv$$

nu este unic. Fie o muchie a feţei pe care se găseşte originea sau, dacă originea se găseşte pe o muchie, se consideră muchia însăşi, atunci orice punct v al acestei muchii satisface programul liniar

$$\max_{v \in U} \tilde{\psi}^T(t)\, Bv$$

pentru orice $t \in (t_{1*}, \tilde{t}_1)$.

Fie v', v'' două soluţii ale programului liniar, iar $w = v' - v''$, paralel cu muchia respectivă. Atunci din $\psi^T(t)\, Bv' - \tilde{\psi}(t)\, Bv'' = 0$ rezultă că pentru orice $t \in (t_{1*}, \tilde{t}_1)$ avem

$$\tilde{\psi}^T(t)\, Bw = 0\,.$$

Deci Bw aparţine unui subspaţiu invariant al lui A, ceea ce este absurd şi, în consecinţă, $t_{1*} = \tilde{t}_1$ pentru ca interiorul lui $[t_{1*}, \tilde{t}_1]$ să fie vid.

Din condiţia de necesitate furnizată de principiul maximului şi ilustrată prin incluziunea $\bar{\Sigma}(x_0, U) \subset \tilde{\Sigma}(x_0, U)$, pe de o parte, şi teorema demonstrată, pe de altă parte, rezultă în final că

$$\bar{\Sigma}(x_0, U) = \tilde{\Sigma}(x_0, U)\,,$$

ceea ce înseamnă că o comandă este optimală dacă şi numai dacă respectă principiul maximului. Reamintim încă o dată că am presupus apriori că $\Sigma(x_0, U) \neq \Phi$.

4.3. UNICITATEA COMENZII OPTIMALE

Este firesc acum a vedea care este cardinalul mulţimii $\overline{\Sigma}(x_0, U) = \widetilde{\Sigma}(x_0, U)$, fapt pus în evidenţă de următoarea

TEOREMĂ. *Dacă* $\Sigma(x_0, U) \neq \Phi$, *atunci există o singură comandă optimală, deci card.* $\overline{\Sigma}(x_0, U) = 1$.

Demonstraţie. Să presupunem că există două comenzi optimale $\overline{u}$ şi $\overline{u}'$, cauzînd traiectoriile $\overline{x}(t)$ şi $\overline{x}'(t)$. Evident, ambele conduc în origine sistemul în acelaşi timp $\overline{t}_1 = \overline{t}_1'$, pentru că în caz contrar numai o comandă ar fi optimală.

Pe de altă parte, $\overline{u} \in \widetilde{\Sigma}(x_0, U)$ satisface principiul maximului, adică există $\overline{\psi}$, soluţie nebanală, ca

$$\overline{\psi}^T(t)\, B\overline{u}(t) = \max_{v \in U} \overline{\psi}^T(t)\, Bv, \quad t \in [0, \overline{t}_1]$$

şi deci

$$\overline{\psi}^T(t)\, B\overline{u}(t) \geqslant \overline{\psi}^T(t)\, B\overline{u}'(t), \quad t \in [0, \overline{t}_1]$$

sau

$$\overline{\psi}^T(t)\, B\overline{u}(t) - \overline{\psi}^T B\overline{u}'(t) \geqslant 0, \quad t \in [0, \overline{t}_1].$$

Folosind formula combinată a răspunsului sistemului liniar şi ţinînd cont că $\overline{x}(\overline{t}_1) = 0$, rezultă

$$0 = X(\overline{t}_1)\left(x_0 + \int_0^{\overline{t}_1} \Psi^T(t)\, B\overline{u}(t)\, dt\right),$$

şi, întrucît $X(t)$ nu este degenerată, rezultă

$$x_0 = -\int_0^{\overline{t}_1} \Psi^T(t)\, B\overline{u}(t)\, dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din

$$\bar{\psi}^T(\bar{t}_1)\,\bar{x}'(\bar{t}_1) - \bar{\psi}^T(0)\,x_0 = \int_0^{\bar{t}_1} \bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}'(t)\,dt = -\,\bar{\psi}^T(0)\,x_0$$

se va obține

$$\bar{\psi}^T(0)\,x_0 = -\int_0^{\bar{t}_1} \bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}'(t)\,dt\,.$$

Dar, deoarece $\Psi(t)$ este matricea fundamentală a sistemului asociat, rezultă că

$$\bar{\psi}(t) = \Psi(t)\,\bar{\psi}(0)\,.$$

Deci, înmulțind expresia care dă pe x_0 cu $\bar{\psi}^T(0)$ pe stînga, vom avea

$$\bar{\psi}^T(0)\,x_0 = -\int_0^{\bar{t}_1} (\Psi(t)\,\bar{\psi}(o))^T\,B\bar{u}(t)\,dt = -\int_0^{\bar{t}_1} \bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}(t)\,dt\,.$$

Atunci din ambele expresii ale lui $\bar{\psi}^T(o)\,x_0$ rezultă că

$$\int_0^{\bar{t}_1} \bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}(t)\,dt = \int_0^{\bar{t}_1} \bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}'(t)\,dt$$

sau

$$\int_0^{\bar{t}_1} (\bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}(t) - \bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}'(t))\,dt = 0\,,$$

cu

$$\bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}(t) - \bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}(t') \geqslant 0 \;pe\; [o, \bar{t}_1]\,.$$

Se obține în consecință că

$$\bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}(t) = \bar{\psi}^T(t)\,B\bar{u}'(t)\;pe\,(o, \bar{t}_1)\,,$$

adică există două comenzi $\bar{u}$ și $\bar{u}'$ care satisfac programul

$$\max_{v \in U} \bar{\psi}^T(t)\,Bv\,.$$

Să arătăm că acest lucru este absurd. Pentru aceasta să considerăm pentru fiecare $t \in [o, \bar{t}_1]$ funcția

$$\varphi_t(v) = \bar{\psi}^T(t)\, Bv\,,$$

iar soluția programului liniar

$$\max_{v \in U} \varphi_t(v)$$

se va nota cu v_t. Așa cum este cunoscut, soluția v_t se va găsi fie într-un vîrf al poliedrului, fie pe o față a acestuia. Fie

$$J = \{t \in [0, \bar{t}_1] \mid v_t \text{ se află intr-un subpoliedru}\}\,.$$

Trebuie precizat că pentru fiecare $t \in J$ programul $\max_{v \in U} \varphi_t(v)$ admite o clasă de soluții $\{v_t\}$, adică mulțimea punctelor subpoliedrului respectiv. Să presupunem că J este o mulțime infinită. Extragem șirul convergent $(t_k)_{1 \leqslant k < \infty}$, $t_k \to \theta$ și corespunzător șirul claselor de soluții $(\{v_{l_k}\})_{1 \leqslant k < \infty}$. Șirul claselor de soluții fiind infinit, iar numărul tuturor subpoliedrelor (au dimensiunea $\leqslant n-1$) lui U fiind finit, există cel puțin un subpoliedru care conține un subșir infinit de clase de soluții:

$$(\{v_{l_{kj}}\})_{1 \leqslant j < \infty}\,.$$

Fie e' și e'' două vîrfuri ale acestui poliedru, adică

$$e', e'' \in \{v_{l_{kj}}\} \text{ cu } 1 \leqslant j < \infty$$

și deci:

$$\bar{\psi}^T(t_{kj})\, Be' = \bar{\psi}^T(t_{kj})\, Be'' \text{ cu } 1 \leqslant j < \infty\,.$$

Punînd $e' - e'' = w$ (muchie), rezultă că

$$\bar{\psi}^T(t_{kj})\, Bw = 0 \quad 1 \leqslant j < \infty \quad \text{și} \quad t_{kj} \to \theta\,.$$

Deci funcția analitică $\bar{\psi}^T(t)\, Bw$ are în $t = \theta$ un punct de acumulare de zerouri și deci este identic nulă pe $[0, \bar{t}_1]$, deci și pe $(0, \bar{t}_1)$.

În consecinţă,

$$\bar{\psi}^T(t)\, Bw = 0 \text{ pentru orice } t \in (o, t_1),$$

adică Bw este un vector care aparţine unui subspaţiu invariant al lui A, ceea ce este absurd. Rezultă deci că J este o mulţime finită. Concluzia este următoarea: pentru orice $t \in [0, t_1] \setminus J$, adică exceptînd o mulţime finită, soluţia programului $\max_{v \in U} \varphi_t(v)$ este unică, găsindu-se într-unul din vîrfurile poliedrului U. Punctele mulţimii J definesc o partiţie finită a intervalului $[0, t_1]$. Fie această partiţie $(J_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$. Vom defini funcţia $v : [0, \bar{t}_1] \setminus J$ prin egalitatea

$$v(t) = v_i$$

şi, aşa cum s-a văzut, această definire este unică. Evident, funcţia v este bine definită pe fiecare interval deschis $\overset{\circ}{I}_i$ al partiţiei. Să arătăm că pe fiecare interval deschis $\overset{\circ}{I}_i$ funcţia v este constantă. Să presupunem contrarul, şi anume că pe un interval $\overset{\circ}{I}_i$, v nu este constantă, luînd două valori, e' şi e'', evident în două puncte distincte $\tau', \tau'' \in \overset{\circ}{I}_i$, iar pentru fixarea ideilor vom considera $\tau' < \tau''$.

Fie funcţiile analitice

$$\alpha'(t) = \bar{\psi}^T(t)\, Be' \quad \text{şi} \quad \alpha''(t) = \bar{\psi}^T(t)\, Be''.$$

Întrucît e' este soluţia programului la $t = \tau'$ şi e'' soluţia programului la $t = \tau''$, rezultă că

$$\alpha'(\tau') \geqslant \alpha''(\tau') \quad \text{şi} \quad \alpha'(\tau'') \leqslant \alpha''(\tau'').$$

Ţinînd cont de continuitatea funcţiilor α' şi α'' şi de inegalităţile de mai sus, rezultă că graficele celor două funcţii se vor intersecta într-un punct $\tau''' \in [\tau, \tau'']$. Dacă τ''' este una dintre extremităţile intervalului, de exemplu τ', rezultă că $\alpha(\tau') = \alpha''(\tau')$ şi, conform unicităţii programului, $e' = e''$. Dacă $\tau''' \in (\tau', \tau'')$, soluţia programului va fi e''' şi vom considera funcţia analitică $\alpha'''(t) = \bar{\psi}^T(t)\, Be'''$.

Fie atunci pentru fiecare vîrf $e^{(k)}$ al poliedrului funcţiile analitice

$$\alpha^{(k)}(t) = \bar{\psi}^T(t)\, Be^{(k)},$$

Scanned with OKEN Scanner

definite pe $\mathring{I}_i$, împreună cu graficele lor. Pe baza raţionamentului făcut asupra graficelor funcţiilor α' şi α'', rezultă că toate graficele funcţiilor se taie între ele două cîte două. Fie τ^* cel mai apropiat punct de τ' la dreapta acestuia şi diferit de τ' rezultat din intersecţia graficului lui α' cu celelalte grafice. Să presupunem că τ^* corespunde intersecţiei cu graficul funcţiei $\alpha^{(s)}$, unde, evident, $e' \neq e^{(s)}$. Atunci în punctul τ^* avem

$$\bar{\psi}^T(\tau^*)\, Be' = \bar{\psi}^T(\tau^*)\, Be^{(s)} \geqslant \bar{\psi}^T(\tau^*)\, Be^{(k)},$$

cu $e^{(k)} \neq e', e^{(s)}$.

Aşadar, φ_{τ^*} îşi atinge pentru $\tau^* \in \mathring{I}_i$ maximul simultan în două vîrfuri distincte e' şi $e^{(s)}$, ceea ce contrazice proprietatea de univocitate pe intervalul $\mathring{I}_i$.

În consecinţă, pe intervalul $\mathring{I}_i$ funcţia v ia o singură valoare, fiind constantă. Rezultă atunci că funcţia v are în extremităţile intervalelor I_i discontinuităţi de prima speţă, fiind în definitiv o funcţie în scară. Aşadar, determinarea soluţiei programului $\max_{v \in U} \varphi_i(v)$ conduce la o funcţie în scară v unică.

Revenind la soluţiile $\bar{u}$ şi şi $\bar{u}'$ ale programului φ_i, rezultă că acestea se confundă cu funcţia v.

În concluzie, comanda optimală $\bar{u}$ este una singură fiind o funcţie în scară bine determinată, valorile „palierelor" fiind vîrfurile poliedrului U. Se poate acum afirma că, dacă $\Sigma(x_0, U) \neq \Phi$, atunci există o singură comandă $\bar{u} \in \Sigma(x_0, U)$ care satisface principiul maximului, fiind în acelaşi timp şi comanda optimală unică, sau

$$\Sigma(x_0, U) \neq \Phi \to (\bar{\Sigma}(x_0, U) = \tilde{\Sigma}(x_0, U), \operatorname{card} \bar{\Sigma}(x_0, U) = 1),$$

implicaţie remarcabilă a sistemelor autonome liniare.

4.4. EXISTENŢA COMENZILOR OPTIMALE

În acest paragraf ne vom ocupa de problema esenţială care constă în aceea de a vedea dacă $\Sigma(x_0, U)$ este vidă sau nu, adică dacă dintr-un punct $x_0 \in X$ se poate construi o conducere finalizată în originea spaţiului şi dacă aceasta este posibil, să se construiască apoi o comandă optimală.

Scanned with OKEN Scanner

Fie definită pentru $T > 0$ mulțimea

$$A_T = \{x \in X \mid \text{există o comandă optimală care transferă punctul } x \text{ în origine cu durata optimă } t_1 = T\}.$$

1. Să arătăm că $A_T \neq \emptyset$. Fie $p \neq 0$ în X și $\psi(t, p) = \psi(t)p$, adică soluția sistemului asociat inițializată la $t = 0$ în p. Atunci programul

$$\max_{v \in U} \psi^T(t, p) Bv, \quad t \in [0, T]$$

furnizează o comandă (în scară) unică : $u(t, p)$. Se pune acum problema dacă putem găsi un punct $\xi_T(p)$ care să fie transferat de comanda $u(t,p)$ în origine, adică să satisfacă ecuația

$$0 = X(T)\left(\xi_T(p) + \int_0^T \psi^T(t)\, Bu(t, p)\, dt\right).$$

Cum $X^{-1}(T)$ există, rezultă că

$$\xi_T(p) = -\int_0^T \psi^T(t)\, Bu(t, p)\, dt.$$

Vom accepta apriori că ξ_T depinde continuu de p, proprietate care va implica, așa cum vom vedea, compacticitatea lui A_T.

Cum $\xi_T(p)$ este transferat în origine în timpul T și cum $u(\ , p) \in \widetilde{\Sigma}(\xi_T(p), U)$, rezultă că $u(\ , p)$ este chiar comanda optimală care transferă în timpul minim T, $\xi_T(p)$ în origine. Așadar, $A_T \neq \emptyset$. Fie din nou $p \neq 0$, pentru care se construiește $\xi_T(p) \in A_T$. Notăm cu $\Gamma_T(p)$ hiperplanul de normală p care trece prin punctul $\xi_T(p)$. Atunci

2. $\Gamma_T(p)$ este un hiperplan de sprijin al mulțimii A_T, adică are cel puțin un punct comun cu A_T, iar toate punctele lui A_T se găsesc de o singură parte a hiperplanului menționat (fig. 17).

Fie $\xi \in A_T$ și u comanda optimală care-l transferă în timpul T în origine. Să evaluăm produsul scalar $< p, \xi - \xi_T(p) >$. Atunci

$$< p, \xi - \xi_T(p) > = p^T\xi - p^T\xi_T(p) =$$

$$= \psi^T(0, p)\,\tilde{x}(0) - \psi^T(0, p)\,x(0) = \psi^T(T, p)\,x(T) - \psi^T(0, p)\,x(0) -$$

$$- (\psi^T(T, p)\,\tilde{x}(T) - \psi^T(0, p)\,\tilde{x}(0)) = \int_0^T \psi(t, p)\, Bu(t, p)\, dt -$$

$$- \int_0^T \psi^T(t, p)\, B\bar{u}(t)\, dt = \int_0^T (\psi^T(t, p)\, Bu(t, p) - \psi^T(t, p)\, B\bar{u}(t))\, dt,$$

unde $x(t)$ şi $\tilde{x}(t)$ sînt traiectoriile cauzate de $u(\ ,p)$ respectiv $\bar{u}$.

Dar

$$\psi^T(t,p)\,Bu(t,p) = \max_{v\in U} \psi^T(t,p)\,Bv \geqslant \psi^T(t,p)\,B\bar{u}(t),$$

deci

$$\psi^T(t,p)\,Bu(t,p) - \psi^T(t,p)\,B\bar{u}(t) \geqslant 0,$$

adică

$$< p, \xi - \xi_T(p) > \geqslant 0,$$

relaţie care arată că punctele ξ sînt de aceeaşi parte a hiperplanului, iar $\xi_T(p) \in \Gamma_T(p)$. Deci $\Gamma_T(p)$ este un hiperplan de sprijin.

3. $\Gamma_T(p)$ are cu A_T un singur punct comun. Într-adevăr. Să presupunem că ar avea încă un punct comun : $\xi \neq \xi_T(p)$. Fie atunci $\bar{u}$ comanda optimală care transferă ξ în origine.

Deoarece $\xi \in \Gamma_t(p)$, avem

$$< p, \xi - \xi_T(p) > = 0,$$

adică

$$\int_0^T (\psi^T(t,p)\,Bu\,(t,p) - \psi^T(t,p)\,B\bar{u}\,(t))\,\mathrm{d}t = 0,$$

cu

$$\psi^T(t,p)\,Bu(t,p) - \psi^T(t,p)\,B\bar{u}\,(t) \geqslant 0,$$

deci

$$\psi^T(t,p)\,Bu\,(t,p) = \psi^T(t,p)\,B\bar{u}\,(t).$$

Rezultă că programul

$$\max_{v\in U} \psi^T(t,p)\,Bv, \quad t \in [0,t]$$

furnizează două soluţii distincte, ceea ce este absurd. Aşadar, $\Gamma_T(p)$ are cu A_T un singur punct comun $\xi_T(p)$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\mathcal{A}_T$ acoperirea convexă a lui A_T, care, datorită compacităţii lui A_T, este un corp convex.

4. Frontiera lui $\mathcal{A}_T$ este chiar A_T. Pentru aceasta să arătăm că $F_r(\mathcal{A}_T) \subset A_T$. Presupunem contrarul, adică existenţa unui punct $\xi \in F_r(\mathcal{A}_T)$ astfel ca $\xi \notin A_T$. Atunci hiperplanul de sprijin Γ dus în ξ

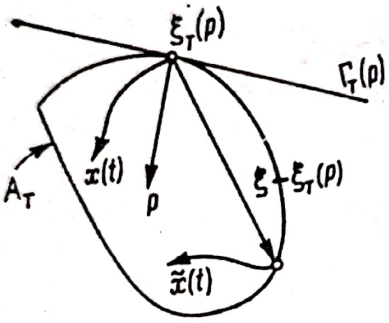


Fig. 17

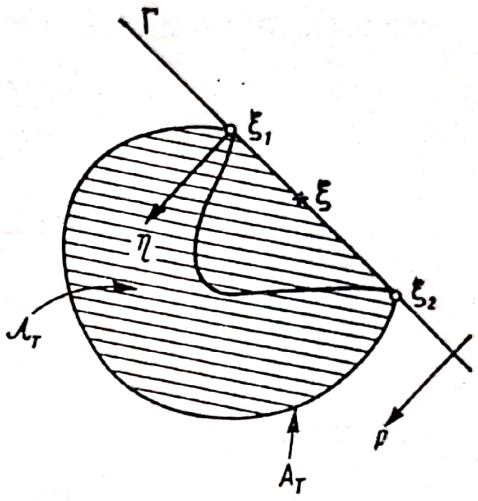


Fig. 18

la mulţimea $\mathcal{A}_T$ are cel puţin două puncte comune cu A_T (fig. 18): ξ_1, ξ_2.

Fie p normala la Γ, orientată ca în figura 18. Se poate construi atunci punctul $\xi_T(p)$, deci şi planul $\Gamma_T(p) \| \Gamma$. Atunci $\Gamma_T(p)$ este hiperplan de sprijin şi pentru acoperirea convexă, $\mathcal{A}_T$. Rezultă că există două hiperplane de sprijin pentru $\mathcal{A}_T$ paralele, de aceeaşi normală p, $\mathcal{A}_T$ găsindu-se simultan datorită aceleiaşi orientări a normalei p în semispaţiul pozitiv, $< p, \eta > \geqslant 0$, fapt care conduce la identitatea dintre cele două hiperplane de sprijin, adică $\Gamma = \Gamma_T(p)$. Rezultă atunci că $\Gamma_T(p)$ are două puncte comune ξ_1, ξ_2 cu A_T, ceea ce este absurd.

Aşadar, $F_r(\mathcal{A}_T) \subset A_T \subset \mathcal{A}_T$, de unde, evident, $F_r(\mathcal{A}_T) = A_T$. Concluzie: orice hiperplan de sprijin al lui $\mathcal{A}_T$ este de tipul $\Gamma_T(p)$ avînd cu acesta un singur punct comun.

5. Originea este un punct interior mulţimii $\mathcal{A}_T$. Să arătăm pentru aceasta că originea nu se găseşte pe nici un hiperplan de tipul $\Gamma_T(p)$, adică totdeauna

$$< p, 0 - \xi_T(p) > \neq 0.$$

Într-adevăr,

$$< p, 0 - \xi_T(p) > = - p^T \xi_T(p) = - \psi^T(0, p)\, x(0) +$$
$$+ \psi^T(T, p)\, x(T) = \int_0^T \psi^T(t, p)\, Bu(t, p)\, dt.$$

Dar, cu excepţia unui număr finit de momente,

$$\psi^T(t, p)\, Bu(t, p) > 0,$$

deci

$$\int_0^T \psi^T(t, p)\, Bu(t, p)\, dt > 0.$$

Rezultă că

$$< p, 0 - \xi_T(p) > > 0.$$

Presupunem acum că

$$0 \in F_r(\mathcal{A}_T).$$

Hiperplanul de sprijin la $\mathcal{A}_T$ în 0 este de tipul $\Gamma_T(p)$, deci $0 \in \Gamma_T(p)$, ceea ce este absurd. Fie atunci

$$0 \in C\mathcal{A}_T.$$

Se poate duce atunci prin origine un hiperplan de sprijin la $\mathcal{A}_T$, care va fi însă de tipul $\Gamma_T(p)$, ceea ce conduce de asemenea la o absurditate.

În consecinţă, proprietăţile 1), 2), 3), 4) au servit de fapt la demonstrarea proprietăţii 5):

$$0 \in \mathring{\mathcal{A}}_T.$$

6. Să arătăm acum că pentru orice $T' < T$

$$\mathcal{A}_{T'} \subsetneqq \mathcal{A}_T.$$

Într-adevăr, în caz contrar există un punct din $A_{T'}$ care este fie pe A_T, ceea ce este absurd ($T' < T$), fie exterior lui $\mathcal{A}_T$. În acest caz, traiectoria care pleacă din acest punct exterior spre origine, care este punct interior, va intersecta A_T la un moment dat $\theta > 0$, de unde în timpul T va ajunge în origine, adică ceea ce este de asemenea absurd.

Scanned with OKEN Scanner

În fine, să demonstrăm proprietatea esențială că din orice punct interior a lui $\mathcal{A}_T$ există o traiectorie optimală care transferă acest punct în origine, lucru demonstrat pînă acum numai pentru frontiera A_T a lui $\mathcal{A}_T$.

Fie $x_* \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}_T$. Dreapta Ox_* va intersecta în x_0 frontiera A_T a lui $\mathcal{A}_T$. Fie de asemenea $\varphi(T')$ distanța de la origine la punctul de pe dreapta Ox_0 unde aceasta înțeapă frontiera $A_{T'}$ a lui $\mathcal{A}_{T'}$ cu $T' < T$. Întrucît $\mathcal{A}_{T'} \subsetneq \mathcal{A}_T$, $\varphi(T')$, considerată ca funcție de T', este strict monoton descrescătoare o dată cu T'. Considerăm apriori faptul că φ este continuă în raport cu T'.

De asemenea, $\lim\limits_{T' \to 0} \varphi(T') = 0$. În consecință, va exista $T_* \in [0, T]$ ca $\varphi(T_*) = x_*$, ceea ce înseamnă că $x_* \in A_{T^*}$.

Am demonstrat că $\mathcal{A}_T$ este totalitatea punctelor din X care pot fi transferate optimal în origine cu $\tilde{t}_1 \leqslant T$, această mulțime nefiind vidă și reprezentînd un corp convex (un compact convex cu interior nevid). Fie în general

$$\mathcal{A} = \bigcup_{0<T<\infty} \mathcal{A}_T.$$

Atunci $\mathcal{A}$ este totalitatea punctelor din X care pot fi transferate optimal în origine. Evident, $\mathcal{A}$ este convexă și deschisă. Într-adevăr, dacă x_* este transferat optimal în origine în timpul T_*, atunci $x_* \in \mathcal{A}_T$ cu $T \geqslant T_*$, deci $x_* \in \mathcal{A}$. Reciproc, orice punct din $\mathcal{A}$ este transferat optimal în origine, ceea ce este evident din însăși definiția mulțimii $\mathcal{A}$.

În încheiere, să demonstrăm cele două proprietăți considerate valabile apriori, și anume ξ_T continuă în raport cu p și φ continuă în raport cu T'.

Să arătăm întîi că ξ_T este continuă în raport cu p. Fie $\varepsilon > 0$, $p \neq 0$ și $\psi(t,p)$, rezultat ca soluție a sistemului asociat pentru $\psi(0,p) = p$. Principiul maximului furnizează funcția în scară $u(t,p)$ satisfăcînd programul $\max\limits_{v \in U} \psi^T(t)\, Bv$. Fie $\tau_1, \ldots, \tau_q$ punctele de discontinuitate ale acestei funcții. Izolăm aceste puncte prin intervalele $J_1, \ldots, J_q$ și care totalizează în întregime lungimea $\dfrac{\varepsilon}{2M}$, unde

$$M = \max_{\substack{t \in [0,\, T] \\ v \in U}} \| \Phi(t)\, Bv \|,$$

care există deoarece Ψ este continuă pe $[0, T]$, iar U-compact. Fie $I_1, \ldots, I_r$ intervalele deschise care complementează față de $[0, T]$ intervalele $J_1, \ldots, J_q$, iar

$$I = \bigcup_{i=1}^{r} I_i, \quad J = \bigcup_{i=1}^{q} J_i, \quad I \cup J = [0, T].$$

Atunci, din

$$\xi_T(p) + \int_0^T \Phi^T(t)\, Bu\,(t, p)\, \mathrm{d}t = 0$$

rezultă :

$$\left\| \xi_T(p) + \int_I \Phi^T(t)\, Bu(t, p)\, \mathrm{d}t \right\| = \left\| \int_J \Phi^T(t)\, Bu\,(t, p)\, \mathrm{d}t \right\| \leqslant M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pe fiecare interval I_i, $u(t, p)$ este constantă. Să considerăm un astfel de interval unde $u(t,p) = e$ și unde, evident,

$$\psi^T(t, p)\, Be > \psi^T(t, p)\, Be'$$

pentru orice vîrf e' al poliedrului U.

Considerăm un vector $p_* \neq p$ suficient de apropiat de acesta ca soluția $\psi(\ , p_*)$ pe $[0, T]$ să fie suficient de vecină cu $\psi(\ , p)$, lucru posibil, datorită faptului că $[0, T]$ este un interval finit. Stabilitatea sistemului $\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -A^T\psi$ neintervenind, vom avea în continuare pe I valabilă inegalitatea

$$\psi^T(t, p_*)\, Be > \psi^T(t, p_*)\, Be' \text{ cu } e \neq e',$$

deci soluția programului

$$\max_{v \in U} \psi^T(t, p)\, Bv, \quad t \in [0, T],$$

este pe I_i, $v = e$, adică $u(t, p_*)\,|_{t \in I_i} = e$. Raționamentul se continuă pe fiecare interval I, în final obținîndu-se

$$u(t, p_*) = u(t, p)$$

și deci pentru comanda $u(t,p_*)$ este valabilă inegalitatea

$$\left\| \xi_T(p_*) + \int_I \Phi^T(t) B\, u\,(t, p_*) \mathrm{d}t \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se vede imediat că

$$\| \xi_T(p) - \xi_T(p_*) \| \leqslant \varepsilon$$

pentru p_* suficient de vecin cu p. Aşadar, $\xi_T(p)$ este o funcţie continuă în raport cu variabila p. A_T este compactă. Într-adevăr, fie

$$S_{n-1} = \{p \in X = R^n \mid \|p\| = 1\},$$

reprezentînd o sferă $n-1$ dimensională din X. Pentru orice $x_0 \in A_T$ există cel puţin un $p \in S_{n-1}$ astfel încît să existe o comandă optimală $u(t,p)$ care să conducă x_0 în origine în timpul optim T, adică $x_0 = \xi_T(p)$ cu $\| p \| = 1$. $x_0 \in A_T$ implică existenţa unei comenzi optimale $u_0(t)$ care transferă x_0 optimal în origine în timpul T. Conform principiului maximului, există o soluţie $\psi^0(t)$ nebanală a sistemului asociat pentru care este valabil acesta. Punînd

$$p = \frac{\psi^0(0)}{\| \psi^0(0) \|},$$

evident soluţia $\psi(t, p)$ cu $\psi(0, p) = p$ va satisface în continuare principiul maximului, adică $u(t, p) = u_0(t)$ şi deci

$$x_0 = -\int_0^T \Phi^T(t)\, B u_0(t)\, dt = -\int_0^T \Phi^T(t)\, B u(t, p)\, dt = \xi_T(p).$$

Cum la fiecare $p \in S_{n-1}$ corespunde un $\xi_T(p) \in A_T$, rezultă că aplicaţia

$$S_{n-1} \ni p \to \xi_T(p) \in A_T$$

este continuă şi „pe", adică A_T este un compact deoarece S_{n-1} este un compact.

Să încheiem prin demonstrarea faptului că $\varphi(T')$ este lifschitziană, ceea ce implică, evident, continuitatea funcţiei. Fie $T^* < T' < T'' < T$ şi mulţimile $\mathcal{A}_{T^*} \subsetneq \mathcal{A}_{T'} \subsetneq \mathcal{A}_{T''} \subsetneq \mathcal{A}$ cu frontierele A_{T^*}, $A_{T'}$, $A_{T''}$, A_T (fig. 19). Deoarece $\mathring{\mathcal{A}}_{T^*} \ni 0$, există $\rho > 0$ ca $\overline{V}_\rho(0) \subsetneq \mathcal{A}_{T^*}$. Se construieşte conul circumscris sferoidului $\overline{V}_\rho(0)$ cu vîrful în x', după care se prelungeşte acest con înscriindu-se pe sferoidul $\overline{V}_{\rho''}(x'')$. Rezultă imediat din relaţii de asemănare că

$$\frac{\|x' - x''\|}{\rho''} = \frac{\|x'\|}{\rho} \quad \text{sau} \quad \frac{\varphi(T'') - \varphi(T')}{\rho''} = \frac{\varphi(T')}{\rho},$$

adică

$$\varphi(T'') - \varphi(T') = \frac{\rho''}{\rho}\varphi(T') < \frac{\rho''}{\rho}\varphi(T).$$

Considerînd traiectoria optimală care pleacă din x'' spre origine,

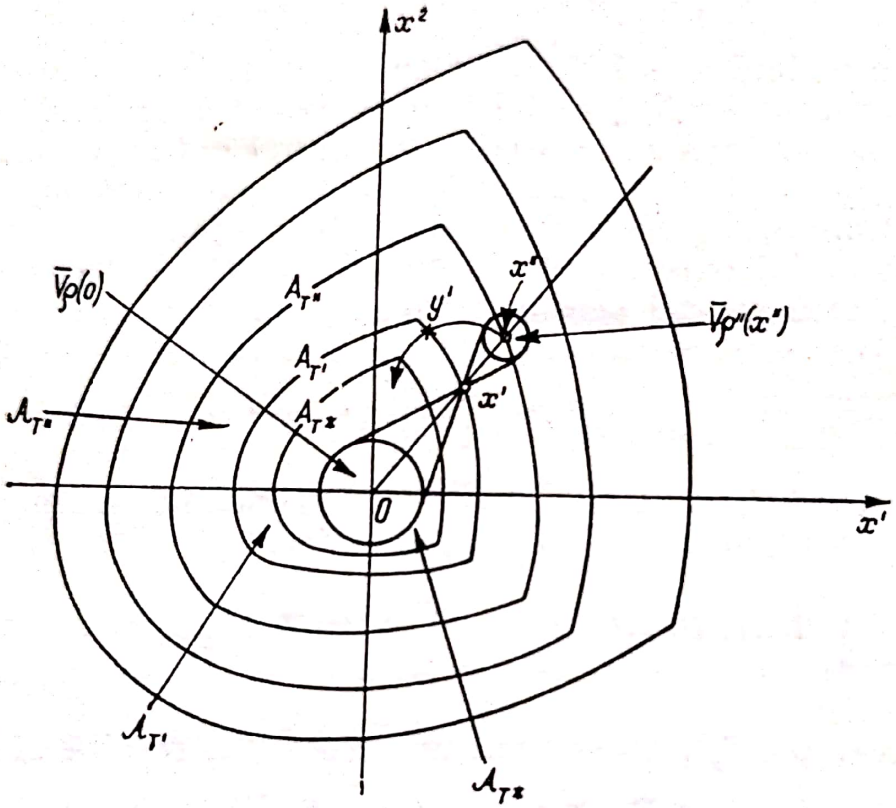


Fig. 19

timpul pînă cînd această traiectorie intersectează în y' pe $A_{T''}$ este, evident, $T'' - T'$, viteza medie între x' şi y' fiind

$$\frac{\| x'' - y' \|}{T'' - T'}.$$

Cum $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$, rezultă că $\left\| \frac{dx}{dt} \right\|$ este mărginită în $\mathcal{A}_x$ şi U, adică există $M > 0$ ca

$$\frac{\| x'' - y' \|}{v'' - T'} \leqslant M,$$

adică

$$||x'' - y'|| \leqslant M(T'' - T').$$

Se vede de asemenea din figura 19 imediat că întotdeauna

$$\rho'' < ||x' - y'||$$

şi deci

$$\rho'' < M(T'' - T'),$$

adică

$$\varphi(T'') - \varphi(T') < \frac{M\varphi(T)}{\rho}(T'' - T'),$$

demonstraţia fiind completă.

Concluzii. 1. Pentru fiecare $T>0$ există totdeauna cel puţin un punct $\xi_T(p)$ $(p \neq 0)$ pentru care există o comandă optimală care transferă acest punct în origine în timpul optim T.

2. Totalitatea punctelor $\xi_T(p)$ pentru T dat, pozitiv, şi p oarecare formează mulţimea compactă A_T.

3. Totalitatea punctelor din X care pot fi transferate optimal în origine într-un timp mai mic sau egal cu T formează mulţimea $\mathcal{A}_T$.

4. $\mathcal{A}_T$ este un corp convex (compact convex cu interior nevid), fiecare hiperplan de sprijin $\Gamma(p)$ avînd un singur punct comun cu $\mathcal{A}_T$, iar $F_r(\mathcal{A}_T) = A_T$. Originea este conţinută în interiorul mulţimii $\mathcal{A}_T$.

5. Pentru orice şir strict crescător $(T_i)_{1 \leqslant i < \infty}$, $T_1 > 0$ rezultă şirul de incluziuni stricte:

$$\mathcal{A}_{T_1} \subsetneqq \mathcal{A}_{T_2} \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathcal{A}_{T_n} \subsetneqq \ldots$$

Proprietatea 4) impune relaţiile

a) pentru două puncte distincte $\xi_T(p)$ şi $x \in \mathcal{A}_T$ are loc inegalitatea strictă

$$< p, x - \xi_T(p) > > 0;$$

b) $< p, x > < 0$ pentru orice $x \in A_T$.

6. Din demonstrarea continuităţii funcţiei ξ_T s-a văzut că pentru doi vectori vecini p şi p_* (necoliniari) soluţiile $\psi(t,p)$ şi $\psi(t,p_*)$ generează aceeaşi comandă optimală $u(t,p)$.

7. Dîndu-se un punct $x \in A_T$, există o mulţime de vectori p care generează comanda optimală, care transferă punctul considerat în timpul optim T în origine, oricare ar fi doi vectori p şi p' din această mulţime nu este obligatoriu ca ei să fie coliniari.

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMĂ. *Dacă matricea A este stabilă, atunci* $\mathcal{A} = X$.

Demonstrație. Fie $x_0 \in X$ și $T > 0$. Dacă $x_0 \in \mathcal{A}_T$, teorema este demonstrată. Dacă $x_0 \in C\mathcal{A}_T$, atunci, sub acțiunea comenzii $u = 0$, adică în regim liber, sistemul evoluează spre origine asimptotic. La un moment dat, traiectoria regimului liber intersectează A_T, de unde sistemul poate fi preluat optimal.

Să încheiem cu o teoremă de structură a comenzii optimale în cazul cînd poliedrul U devine un paralelipiped dreptunghic.

TEOREMĂ. *Fie U de forma* $\overset{r}{\underset{i=1}{X}} [\alpha^i, \beta^i]$, *originea fiind la fel poziționată ca în cazul general cînd U este un poliedru convex oarecare. Matricea A are toate valorile proprii reale. Atunci fiecare componentă $\bar{u}^i (1 \leqslant i \leqslant r)$ a comenzii optimale $\bar{u}$ are cel mult $n-1$ comutații, înțelegînd prin aceasta că își schimbă de cel mult $n-1$ ori valoarea, trecînd de la valoarea α^i la β^i și invers.*

Demonstrație. Fie u comanda optimală care, evident, este soluția programului :

$$\varphi(v) = \max_{v \in U} \psi^T(t)\, Bv.$$

Deoarece A are valorile proprii reale, soluția $\bar{\psi}(t)$ este de forma

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}'(t)\, e^{\lambda_1 t} + \ldots + \bar{\psi}^q(t)\, e^{\lambda_q t},\ 1 \leqslant q \leqslant n$$

Programul φ poate fi scris

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\psi}_i(t) \left(\sum_{j=1}^{r} b_j^i v^j \right) = \sum_{j=1}^{r} v^j \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^i \bar{\psi}_i(t) \right) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j(t)\, v^j,$$

unde

$$\mu_j(t) = \sum_{i=1}^{n} b_j^i \bar{\psi}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} b_j^i (\bar{\psi}_i^1(t)\, e^{\lambda_1 t} + \ldots + \bar{\psi}_i^q(t)\, e^{\lambda_q t}) =$$

$$= \chi_j^1(t)\, e^{\lambda_1 t} + \ldots + \chi_j^q(t)\, e^{\lambda_q t}$$

și unde $\chi_j^1(t), \ldots, \chi_j^q(t)$ sînt polinoame de variabilă t de grad mai mic cu o unitate decît rangul de multiplicitate corespunzător rădăcinilor $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$.

Scanned with OKEN Scanner

Se vede imediat că $\varphi\ (v)$ este maximă pentru

$$v^j = \alpha^j \quad \text{dacă} \quad \mu_j\,(t) < 0,$$
$$v^j = \beta^j \quad \text{dacă} \quad \mu_j\,(t) > 0,$$

soluția nefiind unică cînd $\mu_j\,(t) = 0$.

Dar $\mu_j\,(t)$ își schimbă semnul de cel mult n ori, trecînd deci prin zero de cel mult $n-1$ ori, conform unei proprietăți pe care le au funcțiile de forma μ_j. În consecință, funcția $sgn\ \mu_j\,(t) = sgn\,(\chi_j^1\,(t)\,e^{\lambda_1 t} + \ldots + \chi_j^q\,e^{\lambda_q t})$ dictează o comutație a componentei v^j din valoarea $\alpha^j\,(\beta^j)$ în $\beta^j\,(\alpha^j)$, numărul comutațiilor fiind egal cu numărul anulărilor funcției μ_j, care este cel mult $n-1$.

Problema fundamentală a conducerii optimale în funcție de rapiditate constă în găsirea unei soluții nebanale $\bar{\psi}$ care să furnizeze cu ajutorul programului

$$\varphi\,(v) = \max_{v \in U}\ \bar{\psi}^T\,(t)\,B\,v$$

comanda optimală. Obținerea acestei comenzi în cazul cînd U este un paralelipiped dreptunghic revine la calculul momentelor de comutație. Dificultatea esențială constă în cunoașterea unei soluții $\bar{\psi}$. Un rezultat remarcabil în acest sens a fost obținut de L.W. Neustadt.

4.5. TEOREMA LUI NEUSTADT ȘI ALGORITMUL EATON

Fie $0 \neq x_* \in A_{t*}$, existînd astfel cel puțin un vector $p \neq 0$ pentru care $x_* = \xi_{t*}\,(p)$ (t fiind timpul optim de conducere în origine sub acțiunea comenzii optimale $u(t,p)$). Introducem următoarele mulțimi :

1) $D = \{\, p \mid < p, x_* > < 0 \,\}$, formînd semispațiul deschis care conține originea definit de hiperplanul $< \xi, x_* > = 0$;

2) $N_* = \{p \mid x_* = \xi_{t*}\,(p)\}$.

Evident, $N_* \subset D$, căci $< p, \xi_{t*}\,(p) > < 0$, concluzia 5.b. de la pct. 4.4. Fie definită pe $(0, t_*\,] \times D$ cu valori reale funcția

$$f(t, p) = < p, x_* - \xi_t\,(p) >,$$

evident prelungibilă și în exteriorul lui D.

Funcţia f este continuă pe $(o, t_*] \times D$, deoarece

$$|f(t,p) - f(t',p')| = |<p, x_* - \xi_t(p)> - <p', x_* - \xi_{t'}(p')>| =$$
$$= |<p-p', x_*> + <p', \xi_{t'}(p')> -$$
$$- <p, \xi_t(p)>| \leqslant \|p-p'\| \|x_*\| +$$
$$+ |<p, \xi_t(p)> - <p', \xi_{t'}(p')>| \leqslant \|p-p'\| \|x_*\| +$$
$$+ |<p, \xi_t(p)> - <p, \xi_t(p')>| + |<p, \xi_t(p')> -$$
$$- <p', \xi_{t'}(p')>| \leqslant \|p-p'\| \|x_*\| + \|p\| \|\xi_t(p) - \xi_t(p')\| +$$
$$+ |<p, \xi_t(p')> - <p', \xi_t(p')>| +$$
$$+ |<p', \xi_t(p')> - <p', \xi_{t'}(p')>| \leqslant$$
$$\|p-p'\| \|x_*\| + \|p\| \|\xi_t(p) - \xi_t(p')\| +$$
$$+ \|p-p'\| \|\xi_t(p')\| + \|p'\| \|\xi_t(p') - \xi_{t'}(p')\|.$$

Se vede imediat că, atunci cînd $p \to p'$ şi $t' \to t$, rezultă

$$\|p-p'\| \|x_*\| \to 0, \quad \|p\| \|\xi_t(p) - \xi_t(p')\| \to 0$$

pe baza continuităţii funcţiei $\xi_t(p)$ în raport cu p, $\|p-p'\| \|\xi_t(p')\| \to 0$, căci $\xi_t(p') \to \xi_t(p)$, iar ultima normă tinde de asemenea la zero deoarece

$$\|\xi_t(p') - \xi_{t'}(p')\| = \left\|\int_0^t \Psi^T(\tau) Bu(\tau, p)\, d\tau -\right.$$

$$\left.\int_0^{t'} \Psi^T(\tau) Bu(\tau, p')\, d\tau\right\| = \left\|\int_t^{t'} \Psi^T(\tau) Bu(\tau, p')\, d\tau\right\| \leqslant M|t - t'|,$$

astfel că

$$|f(t,p) - f(t',p')| \to 0 \text{ cînd } t' \to t, p' \to p.$$

Se vede că

$$\lim_{t \to 0} f(t,p) = <p, x_*> < 0.$$

PROPOZIȚIE Pentru orice $p \in D$ există un singur $t_p \in (0, t_*]$ ca $f(t_p, p) = 0$

Demonstrație. Fie $p \in D$; $f(\ , p)$ este strict monoton crescătoare în raport cu t:

$$t < t' \to f(t, p) - f(t', p) = < p, x_* - \xi_t(p) > - < p, x_* - \xi_{t'}(p) > = < p, \xi_{t'}(p) - \xi_t(p) > < 0,$$

deoarece $\xi_{t'}(p)$ este exterior lui $\mathcal{A}_T$, adică

$$t < t' \to f(t, p) < f(t', p).$$

Cazul 1. $p \in N_* \to f(t_*, p) = < p, x_* - \xi_{t*}(p) > = < p, 0 > = 0$

adică $t_p = t_*$

Cazul 2.

$p \notin N_*$, adică $x_* - \xi_t(p) \neq 0$ cu $\xi_t(p)$ în interiorul sau pe frontiera lui $\mathcal{A}_{t*}$, și atunci, conform cu concluzia 5 a),

$$< p, x_* - \xi_{t*}(p) > > 0, \quad \text{adică } f(t_*, p) > 0,$$

deci

$\lim_{t \to 0} f(t, p) < 0$;

$f(t_*, p) > 0$;

$f(\ , p)$ continuă și strict monoton crescătoare.

Există atunci un singur $t_p \in (0, t_*)$ pentru care $f(t_p, p) = 0$. Evident, f fiind continuă, momentul de trecere prin zero depinde continuu de p.

Se poate deci introduce riguros funcția continuă $F : D \to (0, t_*]$ prin $F(p) = t_p$, unde $f(F(p), p) = 0$. În consecință, este continuă și funcția definită pe D prin

$$x_* - \xi_{F(p)}(p),$$

așadar are sens a se vorbi despre ecuația diferențială

$$\frac{dp}{d\tau} = -(x_* - \xi_{F(p)}(p)).$$

TEOREMA LUI NEUSTADT. *Pentru orice* $p_0 \in D$, *soluția ecuației*

$$\frac{dp}{d\tau} = -(x_* - \xi_{F(p)}(p)),$$

cu condiția inițială $p(0) = p_0$ *are următoarele proprietăți :*

1) *există pentru orice* $\tau > 0$, $p(\tau) \in D$;
2) $\| p(\tau) \| = \| p_0 \|$;
3) $\lim_{\tau \to \infty} p(\tau) \in N_*$.

Demonstrație. 1) $F(p(\tau))$ strict monoton crescătoare în raport cu. Vom arăta acest lucru din aproape în aproape, adică pentru orice $\tau > 0$ există $\tau' > \tau$, vecin, astfel ca

$$F(p(\tau)) < F(p(\tau')).$$

Pentru aceasta este suficient să arătăm că

$$f(F(p(\tau)), \quad) < f(F(p(\tau')), \ ),$$

în locul celei de-a doua variabile găsindu-se aceeași valoare pentru variabila independentă p.
Să studiem funcția $f(t, p(\tau))$ în raport cu τ:

$$\frac{\partial f(t, p(\tau))}{\partial \tau} = \langle \nabla_p f(t, p(\tau)), \frac{dp(\tau)}{d\tau} \rangle,$$

unde $\nabla_p f(t, p)$ există fiind posibil a fi calculat. Într-adevăr

$$f(t, p') - f(t, p) = \langle p', x_* - \xi_t(p') \rangle - \langle p, x_* - \xi_t(p) \rangle =$$
$$= \langle p' - p, x_* \rangle + \langle p, \xi_t(p) \rangle - \langle p', \xi_t(p') \rangle, \ p' = p + \varepsilon h,$$

de unde

$$f(t, p + \varepsilon h) - f(t, p) = \varepsilon \langle h, x_* \rangle + \langle p, \xi_t(p) - \xi_t(p') \rangle -$$
$$- \varepsilon \langle h, \xi_t(p') \rangle \to \frac{f(t, p + \varepsilon h) - f(t, p)}{\varepsilon} =$$
$$= \langle h, x_* - \xi_t(p') \rangle - \frac{\langle p, \xi_t(p) - \xi_t(p') \rangle}{\varepsilon}.$$

Dar

$$\langle p, \xi_t(p) - \xi_t(p') \rangle < 0,$$
$$\langle p', \xi_t(p) - \xi_t(p') \rangle > 0,$$

deci

$$0 > < p, \xi_t(p) - \xi_t(p') > > < p, \xi_t(p) - \xi_t(p') > -$$
$$- < p', \xi_t(p) - \xi_t(p') > = - \varepsilon < h, \xi_t(p) - \xi_t(p') >,$$

adică

$$0 > \frac{< p, \xi_t(p) - \xi_t(p') >}{\varepsilon} > - < h, \xi_t(p) - \xi_t(p') >.$$

De unde se vede că

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{< p, \xi_t(p) - \xi_t(p') >}{\varepsilon} = 0,$$

şi deci

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t, p + \varepsilon h) - f(t, p)}{\varepsilon} = < h, x_* - \xi_t(p) > \equiv < h, \nabla_p f(t, p) >$$

sau

$$\nabla_p f(t, p) = x_* - \xi_t(p).$$

Revenind, obţinem

$$\frac{\partial f(t, p(\tau))}{\partial \tau} = - < x_* - \xi_t(p(\tau)), x_* - \xi_{F(p(\tau))}(p(\tau)) >.$$

Dacă tot timpul $p(\tau) \in N_*$, atunci, evident, $p(\tau) \in N$. Presupunem însă că $p(\tau) \notin N_* \to F(p(\tau)) < t_*$, adică

$$x_* - \xi_{F(p(\tau))}(p(\tau)) \neq 0.$$

Atunci

$$\frac{\partial f(F(p(\tau)), p(\tau))}{\partial \tau} = - \| x_* - \xi_{F(p(\tau))}(p(\tau)) \|^2 < 0,$$

inegalitate care se păstrează în jurul valorilor $(F(p(\tau)), p(\tau))$. Derivata parţială negativă referitoare la cea de-a doua variabilă a funcţiei f arată că

$$f(\bar{t}, p(\tau))|_{\bar{t} \text{ vecin cu } F(p(t))} > f(\bar{t}, p(\tau')),$$

unde $\tau' > \tau$, τ' vecin cu τ.

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie, pentru $\tau' > \tau$ suficient de apropiat de τ, avem

$$f(F(p(\tau)), p(\tau)) = 0 \to f(F(p(\tau)), p(\tau')) < 0,$$
$$f(F(p(\tau')), p(\tau')) = 0 \to f(F(p(\tau')), p((\tau)) > 0,$$

deci

$$f(F(p(\tau)), p(\tau)) < f(F(p(\tau')), p(\tau)) \to F(p(\tau)) < F(p(\tau')).$$

Așadar, pentru orice $\tau > 0$ există un $\tau' > \tau$ ca $F(p(\tau)) < F(p(\tau'))$. Din aproape în aproape se vede că, pe măsură ce τ crește, $F(p(\tau))$ este strict crescătoare.

Dacă acum $p(\tau)$ părăsește D, traiectoria va intersecta hiperplanul $< \xi, x_* > = 0$, adică există $\overline{\tau} > 0$ ca

$$< p(\overline{\tau}), x_* > = 0,$$

$$f(t, p(\overline{\tau})) = < \dot{p}(\overline{\tau}), x_* - \xi_t(p(\overline{\tau})) > = - < p(\overline{\tau}), \xi_t(p(\overline{\tau})) > > 0,$$

deci

$$f(t, p(\overline{\tau})) > 0 \text{ cu } t \in (0, t_*]$$

și, evident

$$f(0, p(\overline{\tau})) = \lim_{t \to 0} f(t, p(\overline{\tau})) = 0, \text{ adică } F(p(\overline{\tau})) = 0,$$

iar $F(p(o)) = F(p_0) > 0$,

deci $F(p(\overline{\tau})) < F(p_0)$, ceea ce este absurd, fiind strict monoton crescătoare în raport cu τ.

2) $\dfrac{d}{d\tau} \|p(\tau)\|^2 = 2 < p(\tau), \dfrac{dp(\tau)}{d\tau} > = -2 < p(\tau), \quad x_* - \xi_{F(p(\tau))}(p(\tau)) > = -2f(F(p(\tau)), p(\tau)) = 0$ adică $\|p(\tau)\| = \text{ct.}$

Datorită continuității, $\|p(\tau)\| = \|p_0\|$.

Din 1) și 2) rezultă că $p(\tau)$ are un punct ω—limită, adică există un punct p_* și un șir $(\tau_k)_{1 \leqslant k < \infty}$ cu $\lim\limits_{k \to \infty} \tau_k = +\infty$ ca $\lim\limits_{k \to \infty} p(\tau_k) = p_*$.

3) $p_* \in N_*$.

Presupunem contrarul, adică $x_* - \xi_{F(p_*)}(p_*) \neq 0$.
Revenim la expresia

$$\frac{\partial f(t, p(\tau))}{\partial \tau} = - < x_* - \xi_t(p(\tau)),\ x_* - \xi_{F(p(\tau))}(p(\tau)) >,$$

$$\frac{\partial f(F(p_*), p_*)}{\partial \tau} = - \|x_* - \xi_{F(p_*)}(p_*)\|^2 < 0.$$

Aşadar,

$$\frac{\partial f(F(p_*), p_*)}{\partial \tau} < 0,$$

şi deci pentru valori a lui t şi $p(\tau)$ vecine cu $F(p_*)$ şi p_* avem

$$\frac{\partial f(t, p(\tau))}{\partial \tau} < 0.$$

Există deci $\delta > 0$ şi $M > 0$ ca

$$(|t - F(p_*)| \leqslant \delta \text{ şi } \|p(\tau) - p_*\| \leqslant \delta) \to \left(\frac{\partial f(t, p(\tau))}{\partial \tau} < - M\right) \ (*),$$

apropierea lui $p(\tau)$ de p_* fiind posibilă, deoarece p_* este un punct ω — limită. Să arătăm că implicaţia $(*)$ conduce la o contradicţie.

Deoarece $F(p(\tau))$ este strict monoton crescătoare, tinzînd către $F(p_*)$ cu $\tau_k \to \infty$ şi în acelaşi timp $p(\tau_k) \to p_*$, rezultă că există $\tau_1 > 0$ (suficient de mare) ca

$$|F(p(\tau_1)) - F(p_*)| \leqslant \delta, \quad \|p(\tau_1) - p_*\| \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Atunci

$$\|p(\tau_1') - p_*\| \leqslant \|p(\tau_1') - p(\tau_1)\| + \|p(\tau_1) - p_*\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\|_{\max} |\tau_1' - \tau_1| + \frac{\delta}{2}$$

unde : $\left\| \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\|_{max} = \sup_{0 \leqslant \tau < \infty} \left\| \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\| < +\infty.$

Luînd $|\tau_1' - \tau_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \left\| \frac{dp(\tau)}{d\tau} \right\|_{max}}$, adică τ_1' suficient de aproape de τ_1 cu $\tau_1' > \tau_1$, astfel încît să fie îndeplinită inegalitatea de mai sus, rezultă

$$\|p(\tau_1') - p_*\| \leqslant \delta$$

și, în general, rezultă evident

$$\|p(\tau) - p_*\| \leqslant \delta, \quad \text{pentru orice } \tau \in [\tau_1, \tau_1'].$$

Atunci

$$(\tau \in [\tau_1, \tau_1'], \|p(\tau) - p_*\| \leqslant \delta, \ \|F(p(\tau_1)) - F(p_*)\| \leqslant \delta) \rightarrow$$

$$\frac{\partial f(F(p(\tau_1)), p(\tau))}{\partial \tau} < -M,$$

adică

$$\tau \in [\tau_1, \tau_1'] \rightarrow \frac{\partial f(F(p(\tau_1)), p(\tau))}{\partial \tau} < -M.$$

Integrînd pe $[\tau_1, \tau_1']$, rezultă

$$f(F(p(\tau)), p(\tau_1')) - f(F(p(\tau_1)), p(\tau_1)) < -M(\tau_1' - \tau_1),$$

adică

$$f(F(p(\tau_1)), p(\tau_1')) < -M(\tau_1' - \tau_1).$$

Pe de altă parte,

$$f(F(p(\tau_1)), p(\tau_1')) - f(F(p(\tau)), p(\tau_1')) =$$

$$= \frac{\partial f \cdot (\bar{t}, p(\tau'))}{\partial t} (F(p(\tau_1')) - F(p(\tau_1))), \ \bar{t} \in [F(p(\tau_1)), F(p(\tau_1'))].$$

Derivata parţială în raport cu timpul este mărginită, căci

$$\frac{\partial f(t, p)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} < p,\ x_* - \xi_t(p) > =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} < p_1,\ x_* + \int_0^t \Psi(\tau)\, Bu(\tau, p)\, \mathrm{d}\tau > = < p, \Psi(t)\, Bu(t, p) >,$$

care, evident, este mărginită pe $[0, t_*]$ şi $\|p\| = \|p_0\|$. Există deci $P > 0$, ca

$$-f(F(p(\tau_1)),\ p(\tau_1')) < P(F(p(\tau_1))) > M(\tau_1' - \tau_1),$$

de unde

$$P(F(p(\tau_1')) - F(p(\tau_1))) > M(\tau_1' - \tau_1)$$

sau, în definitiv,

$$F(p(\tau_1)) < F(p(\tau_1')) - \frac{M(\varepsilon_1' - \varepsilon_1)}{P}.$$

Atunci pentru orice $\tau > 0$, se vede că există un $\tau_1 > \tau$ suficient de mare pentru a îndeplini condiţiile

$$\|p(\tau_1) - p_*\| \leqslant \frac{\delta}{2} \quad \text{şi} \quad |F(p(\tau_1)) - F(p_*)| < \delta,$$

aşa că

$$F(p(\tau)) < F(p(\tau_1)) < F(p(\tau_1')) - \frac{M(\tau_1' - \tau_1)}{P},$$

prima inegalitate datorîndu-se strictei monotonii a funcţiei $F(p(\tau))$. Se ajunge la limită că

$$\lim_{\tau \to \infty} F(p(\tau)) < F(p_*) - \frac{M(\tau_1' - \tau_1)}{P},$$

ceea ce este absurd, căci

$$\lim_{\tau \to \infty} F(p(\tau)) = F(p_*)), \text{ adică } p_* \in N_*.$$

Astfel teorema este complet demonstrată.

Observaţie. Din $f(F(p), p) = 0$ rezultă

$$\nabla_p f(F(p), p) = \frac{\partial f(F(p), p)}{\partial t} \nabla F(p) + \nabla_p f(F(p), p) = 0.$$

Dacă $\dfrac{\partial f(F(p), p)}{\partial t} \neq 0$, atunci

$$\nabla F(p) = -\frac{\nabla_p f(F(p), p)}{\dfrac{\partial f(F(p), p)}{\partial t}},$$

dar

$$\nabla_p f(F(p), p) = x_* - \xi_{F(p)}(p).$$

Aşadar, în final

$$\nabla F(p) = \frac{x_* - \xi_{F(p)}(p)}{\dfrac{\partial f(F(p), p)}{\partial t}}$$

Se poate spune că ecuaţia lui Neustadt este echivalentă cu

$$\frac{dp}{d\tau} = \left(\frac{\partial f(F(p), p)}{\partial t}\right) \nabla F(p),$$

viteza este deci proporţională cu grad $F(p)$.

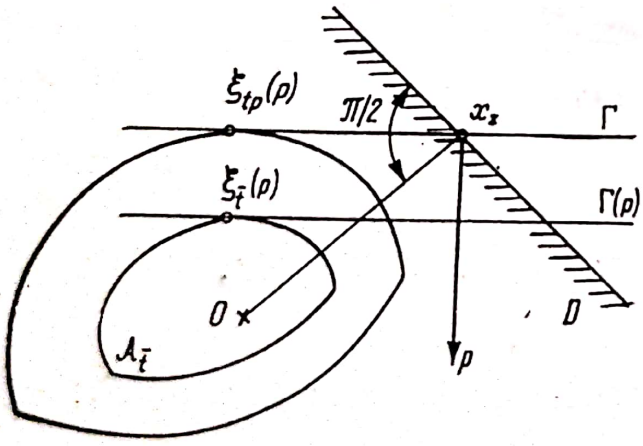


Fig. 20

Interpretare geometrică. Fie $p \in D$ şi fie Γ hiperplanul care trece prin x_*, avînd normala p (fig. 20). Există $\bar{t} \in (o, t_*)$ conform proprietăţilor mulţimilor $\mathcal{A}_t$ ca $\mathcal{A}_t$ să fie dispusă ca în figura 20. Hiperplanul de sprijin $\Gamma(p)$ la mulţimea $\mathcal{A}_{\bar{t}}$ determină unicul punct $\xi_{\bar{t}}(p)$. Crescînd t în intervalul $[\bar{t}, t_*]$, se ajunge la mulţimea $\mathcal{A}_{t_p}$. Se vede imediat că $p \perp x_* - \xi_{t_p}(p)$, deci

$$< p, x_* - \xi_{t_p}(p) > 0.$$

Adică $t_p = F(p) < t_*$, deoarece $x_* \neq \xi_{t_p}(p)$, adică $p \notin N_*$. Dacă $p \in N$, atunci, evident, $\mathcal{A}_{t_p} \ni x_*$, adică $x_* = \xi_{t_p}(p)$, $f(t_p, p) = 0$, iar $t_p = F(p) = t_*$. Se vede de asemenea că

$$f(t, p) = \langle p, x_* - \xi_*(p) \rangle < o,$$

$$t \in (o, t_*],$$

$$p \in D.$$

Aşadar, $F(p)$ este determinat de tangenţa dintre Γ şi mulţimea $\mathcal{A}_t$, la care acesta este hiperplan de sprijin. Se vede de asemenea că raţionamentele geometrice au sens numai pentru $p \in D$.

Metoda numerică iterativă Eaton de determinare a condiţiei iniţiale pentru sistemul asociat

Fiind dat un vector $x_* \in \mathcal{A} - \{o\}$, pentru determinarea unui vector $p_* \in R^n - \{0\}$ pentru care există $t_* > 0$, încît $\xi_{t_*}(p_*) = x_*$ se poate folosi o soluţie $p(\tau, p_0)$ a ecuaţiei lui Neustadt, verificînd condiţia iniţială $p(o, p_0) = p_0$, unde $p_0 \in D$ este un vector arbitrar. Într-adevăr, din teorema anterioară rezultă că drept p_* se poate alege orice punct de acumulare (ω-limită) a curbei-soluţie $(p(\varepsilon, p_0) \mid \tau \in [0, +\infty))$, astfel de puncte existînd datorită faptului că $\| p(\tau, p_0) \| = \| p_0 \| = \text{ct}$, $\tau \in [0, +\infty)$.

În consecinţă, problema determinării unui vector p_* revine la :

1) determinarea soluţiei $p(\tau, p_0)$, $\tau \in [0, \infty)$ a ecuaţiei lui Neustadt cu o condiţie iniţială $p_0 \in D$ dată, aleasă la întîmplare ;

2) determinarea unui punct de acumulare a curbei soluţie $p(\tau, p_0)$, $\tau \in [0, \infty)$, acest punct de acumulare rezultînd a fi un p_*

Pentru integrarea ecuaţiei lui Neustadt este necesar în prealabil calculul membrului drept. Acest calcul se efectuează în următoarele etape :

1) calculul operatorului

$$(R^n - \{0\}) \times (0, \infty) \ni (p, t) \to \xi_t(p) \in R^n.$$

Fie daţi $p \in R^n - \{0\}$, $t \in (0, \infty)$, rezolvînd ecuaţia asociată, se determină o soluţie $\psi(\tau, p)$ pentru care $\psi(0, p) = p$; pe baza acestei soluţii, cu ajutorul principiului maximului se determină comanda $u(\tau, p)$, calculîndu-se apoi $\xi_t(p)$;

2) calculul funcţiei

$$D \ni p \to F(p) \in (0, \infty).$$

Dacă este dat $x_* \in \mathcal{A} - \{0\}$ şi $p \in D$, atunci $F(p)$ este soluţia unică în t a ecuaţiei

$$< p, x_* - \xi_t(p) > = 0;$$

3) calculul operatorului

$$D \ni p \to -(x_* - \xi_{F(p)}(p)) \in R^n,$$

cu $x_* \in \mathcal{A} - \{0\}$ dat, rezultă din parcurgerea celor două etape precedente. Astfel, membrul drept al ecuaţiei lui Neustadt este în întregime calculat.

Pentru rezolvarea numerică a ecuaţiei menţionate se poate utiliza metoda diferenţelor finite : fiind dată condiţia iniţială $p_0 \in D$, se caută un şir de paşi pentru variabila τ :

$$\Delta\tau_0, \Delta\tau_1, \ldots, \Delta\tau_k, \ldots > 0,$$

astfel încît, construind şirul corespunzător de vectori

$$p_1 \ldots, p_k, \ldots \in R^n$$

prin formulele recurente

$$p_{k+1} = p_k - \Delta\tau_k (x_* - \xi_{F(pk)}(p_k)), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

să se obţină una dintre alternativele :

a) există $0 \leqslant k < \infty$ întreg încît $p_k \in N_*$, caz în care se poate alege $p_* = p_k$:

b) există un subşir $(p_{ke})_{0 \leqslant e < \infty}$ convergent către un vector $p' \in R^n$, caz în care $p' \in N_*$, deci se poate alege $p_* = p'$.

În alegerea şirului de paşi $(\Delta\tau_k)_{0 \leqslant k \leqslant \infty}$ pot apărea dificultăţi, deoarece trebuie asigurat ca, pentru orice $k = 0,1\ldots$, p_k să reprezinte o aproximaţie suficientă pentru valoarea exactă $p(\tau_k, p_0)$ a ecuaţiei lui Neustadt, calculată în punctul $\tau_k = \Delta\tau_0 + \ldots + \Delta\tau_{k-1}$. Această chestiune este soluţionată de :

TEOREMA LUI EATON. Fie $x_* \in \mathcal{A} - \{0\}$, $p_0 \in D$, *încît* $\|p_0\| = 1$ $\left(\text{se alege, de exemplu, } p_0 = -\frac{x_*}{\|x_*\|}\right)$ *şi* $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$. *Se defineşte în mod recurent şirul de vectori de normă unitară*

$$p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots R^n$$

astfel : *fie* $k = 0,1\ldots$ *dat, încît vectorii* $p_0, p_1, \ldots, p_k$ *au fost definiți în prealabil; dacă* $p_k \in N_*$, *atunci prin definiție se consideră* $p_* = p_{k+1} = p_{k+2} = \ldots$; *în caz contrar, pentru orice* m *număr natural se definește vectorul*

$$q_{k+1,\,m} = p_k - \rho^m (x_* - \xi_{F(pk)}\,(p));$$

dacă $q_{k+1,\,m} \neq 0$*), se definește vectorul de normă* 1 :

$$q^0_{k+1,\,m} = \frac{1}{\| q_{k+1,\,m} \|}\, q_{k+1,\,m}.$$

Atunci există un cel mai mic număr natural m *pentru care*

$$< q^0_{k+1,\,m},\, x_* - \xi_{F(Pk)}\,(q^0_{k+1,\,m}) > < - \rho^{m+1} \| x_* - \xi_{F(Pk)}\,(p_k) \|^2,$$

în care caz se definește

$$p_{k+1} = q^0_{k+1,\,m}.$$

Dacă pentru șirul de vectori $p_1, \ldots, p_k, \ldots$, *astfel construit,* $p_k \in N_*$ *cu* $k = 0, 1, \ldots$ *atunci*

1) $p_k \in D$ *cu* $k = 0,1, \ldots$

2) $F(p_0) < F(p_1) < \ldots < F(p_k) < F(p_{k+1}) < \ldots$

converge crescător către t_* ;

3) $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{F(pk)}\,(p_k) = x_*$;

4) *orice punct de acumulare din* D *al șirului* $(p_k)_{0\leqslant k<\infty}$ *aparține lui* N_*.

Demonstrație. Aceasta se va efectua în mai multe etape.

A) Fie $p \in D$ cu $\| p \| = 1$ și $h \in (0, \infty)$; atunci

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\, f\left(F(p),\, \frac{p - h\,(x_* - \xi_{F(p)}\,(p))}{\| p - h(x_* - \xi_{F(p)}\,(p)) \|}\right) = - \| x_* - \xi_{F(p)}\,(p) \|^2,$$

*) Deoarece x_*, ρ, k, p sînt fixați vectorul $q_{k+1,\,m}$, se poate anula cel mult pentru o singură valoare a lui m.

uniform în raport cu p. Într-adevăr, p este perpendicular pe $x_* - \xi_{F(p)}(p)$, dat fiind că $< p,\ x_* - \xi_{F(p)}(p) > = f(F(p), p) = 0$ din definiţia lui $F(p)$. Deci rezultă că

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\| p - h(x_* - \xi_{F(p)}(p)) \| - 1) = 0,$$

uniform în raport cu p.
Pe de altă parte, din observaţiile la teorema lui Neustadt şi din interpretarea geometrică, rezultă că $\nabla_p f(t, p) = x_* - \xi_t(p)$, deci $\nabla_p (f(t, p)$ este mărginit pentru $t \in (o, t_*]$, $p \in D$, datorită faptului că $\xi_t(p) \in \mathcal{A}_{t*}$ dacă $o < t \leqslant t_*$. Aplicînd teorema creşterilor finite se obţine

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f\left(F(p), \frac{p - h(x_* - \xi_{F(p)}(p))}{\| p - h(x_* - \xi_{F(p)}(p)) \|} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(F(p), p - h(x_* - \xi_{F(p)}(p)) \right) \right) = 0,$$

uniform în raport cu p. Rezultă de asemenea că

$$f(F(p), p - h(x_* - \xi_{F(p)}(p))) = f(F(p), p - h(x_* - \xi_{F(p)}(p))) -$$

$$- f(F(p), p) = - h < \nabla_p f(F(p), p - \theta h(x_* - \xi_{F(p)}(p))), x_* -$$

$$\xi_{F(p)}(p) > = - h < x_* - \xi_{F(p)}(p - \theta h(x_* - \xi_{F(p)}(p))), x_* - \xi_{F(p)}(p) >,$$

unde $0 \leqslant \theta \leqslant 1$; dar $\lim_{h \to \infty} \xi_{F(p)}(p - \theta h(x_* - \xi_{F(p)}(p))) = \xi_{F(p)}(p)$, uniform în raport cu p, deoarece $\xi_t(p)$ este continuă în p iar, $x_* - \xi_{F(p)}(p) \in x_* - \mathcal{A}_{t*}$, deci $x_* - \xi_{F(p)}(p)$ este mărginită.

B) Dacă $p \in D \setminus N$, atunci $x_* - \xi_{F(p)}(p) \neq 0$ şi pentru orice $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$ există $h_\rho > 0$, încît

$$f\left(F(p), \frac{p - h(x_* - \xi_{F(p)}(p))}{\| p - h(x_* - \xi_{F(p)}(p)) \|} \right) < - \rho h \| x_* -$$

$$- \xi_{F(p)}(p) \|^2 \text{ cu } 0 < h < h_\rho,$$

relaţie care este o consecinţă imediată a celor de la punctul A.

Să alegem $p = p_k$, m cel mai mic număr natural pentru care $\rho^m \leqslant h_\rho$ iar $h = \rho^m$. Atunci.

C) Dacă $p_k \notin N_*$, există un număr natural m încît

$$< \rho^0_{k+1,\,m},\ x_* - \xi_{F(pk)}(\rho^0_{k+1,\,m}) > < -\rho^{m+1} \| x_* - \xi_{F(pk)}(p_k)) \|^2.$$

Evident, dacă această relaţie este verificată pentru un număr natural m, se poate alege cel mai mic număr natural cu această proprietate.

D) Dacă $p_k \notin N_*$, atunci $p_{k+1} \in D$. Într-adevăr, deoarece $< p,\ \xi_t\ (p) > < 0$ cu $p \in R^n - \{0\}$, rezultă în particular $< p_{k+1},\ \xi_{F(pk)}(p_{k+1}) > < 0$; dar, conform cu punctul C,

$$< p_{k+1},\ x_* - \xi_{F(pk)}\ (p_{k+1}) > < 0,$$

$$\text{deci}\quad < p_{k+1},\ x_* > \ < < p_{k+1},\ \xi_{F(pk)}(p_{k+1}) > \ < 0.$$

E) Dacă $p_k \notin N_*$, atunci $F(p_k)\ < F(p_{+1})$. Au loc, evident, relaţiile

$$-f(F(p_k),\ p_{k+1}) = f(F(p_{k+1}),\ p_{k+1}) - f(F(p_k),\ p_k) =$$

$$= (F(p_{k+1}) - F(p_k))\ \frac{\partial}{\partial t}\ f(\eta, p_{k+1})\ \text{ cu }\ \eta \in [F(p_k)\, F p_{k+1})].$$

Conform cu punctul C), $f(F(p_k),\ p_{k+1}) < 0$; pe de altă parte, $\frac{\partial}{\partial t} f(\eta, p_{k+1}) \geqslant 0$ căci $f(t,p)$ este monoton crescătoare în t; rezultă

$$F(p_{k+1}) - F(p_k) \geqslant 0.$$

Dar $\frac{\partial}{\partial t} f(\eta, p_{k+1}) \leqslant C$ cu $C > 0$, deci

$$0 < -f(F(p_k)\, p_{k+1}) = (F(p_{k+1}) - F(p_k))\ \frac{\partial}{\partial t}\ f(\eta, p_{k+1}) \leqslant$$

$$\leqslant C(F(p_{k+1}) - F(p_k)),$$

de unde în definitiv $F(p_k)\ < F(p_{k+1})$.

F) Să presupunem că $p_k \in N_*$ cu $k = 0,1,\ldots$ Atunci, conform celor precedente, rezultă inegalităţile

$$F(p_0) < F(p_1) < \ldots < F(p_k) < \ldots$$

Din definiţia funcţiei F rezultă că $F(p_k) \leqslant t_*$, cu $k = 0,1,\ldots$ Să presupunem prin absurd că $\lim_{k\to\infty} F(p_k) = t' < t_*$; atunci

$$\xi_{F(pk)}(p_k) \in \mathcal{A}_{t'} \text{ cu } k = 0, 1, \ldots ;$$

dar $\mathcal{A}_{t'} \subset \mathcal{A}_{t*}$, căci $t' < t_*$; cum însă $\mathcal{A}_{t'}$ este închisă, iar $x_* \in A_{t*} = Fr(\mathcal{A}_{t*})$, rezultă că există $\delta > 0$ ca

$$\| x_* - \xi_{F(pk)}(p_k) \| \geqslant \delta \text{ cu } k = 0,1,\ldots.$$

Fie $h_\delta > 0$ ca

$$\frac{1}{h} f\left(F(p), \frac{p - h\,(x_* - \xi_{F(p)}(p))}{\| p - h\,(x_* - \xi_{F(p)}(p)) \|}\right) <$$

$$< \| x_* - \xi_{F(p)}(p) \|^2 - \rho\delta^2, 0 < h < h\,\delta,$$

ceea ce este posibil, conform cu relaţia A), în care convergenţa este uniformă în raport cu p. Fie μ un număr natural astfel încît $\rho^\mu \leqslant h_\delta$; atunci

$$f(F(p_k), q^0_{k+1,\mu}) < -\rho^\mu \| x_* - \xi_{F(pk)}(p_*) \|^2 + \rho^\mu\, \rho\delta^2 \leqslant$$

$$- \rho^\mu \| x_* - \xi_{F(pk)}(p_k) \|^2 + \rho^{\mu+1} \| x_* - \xi_{F(pk)}(p_k) \|^2 =$$

$$= - \rho^\mu (1 - \rho) \| x_* - \xi_{F(pk)}(p_k) \|^2 ;$$

cum prin ipoteză $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$, rezultă că $-\rho^\mu (1 - \rho) \leqslant -\rho^{\mu+1}$,

deci

$$f(F(p_k), q^0_{k+1,\mu}) < - \rho^{\mu+1} \| x_* - \xi_{F(pk)}(p_k) \|^2$$

şi deci, conform cu definiţia lui p_{k+1}, există un număr natural $m \leqslant \mu$ încît

$$p_{k+1} = q^0_{k+1,\,m}.$$

Din relaţia C) rezultă atunci

$$f(F(p_k),\ p_{k+1}) < -\rho^{m+1} \| x_* - \xi_{F(pk)}(p_k)\|^2 \leqslant -\rho^{m+1}\ \delta^2,$$

adică $-f(F(p_k),\ (p_{k+1}) > \rho^{m+1}\ \delta^2$; ţinînd seama de relaţia (vezi E)

$$F(p_{k+1}) - F(p_k) \geqslant -\frac{1}{C} f(F(p_k),\ p_k),$$

rezultă în definitiv

$$F(p_{k+1}) - F(p_k) \geqslant \rho^{m+2}\ \delta^2,$$

deci $(F(p_k))\ 0 \leqslant k < \infty$ este un şir nemărginit superior, ceea ce este absurd.

G) Să presupunem prin absurd că nu are loc relaţia

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{F(pk)}(p_k) = x_*;$$

în acest caz există $\delta > 0$ şi un subşir $(p_{ke})_{0\leqslant e<\infty}$ astfel ca $\| x_* - \xi_{F(pke)}(p_{ke})\| \geqslant \delta$ cu $e = 0,1\ldots$. Repetînd raţionamentele de la punctul F) pentru acest subşir, rezultă că subşirul $(F(p_{ke}))_{0\leqslant e<\infty}$ nu este mărginit superior, ceea ce este absurd.

H) Fie $p' \in D$ un punct de acumulare al şirului $(p_k)_{0\leqslant k<\infty}$, atunci există un subşir $(p_{ke})_{0\leqslant e<\infty}$ încît $p' = \lim\limits_{e\to\infty} p_{ke}$. Din continuitatea lui F rezultă că $F(p') = \lim\limits_{l\to\infty} F(p_{ke}) = t_*$, dar atunci $p' \in N_*$. Astfel teorema este complet demonstrată.

Corolar. În condiţiile teoremei precedente, să presupunem că are loc alternativa

$$p_k \in N_* \text{ cu } k = 0,1,\ \ldots.$$

Să notăm pentru $k = 0,1,\ldots$

1) $t_k = F(p_k)$;

2) $u_k : [0, t_k] \to U$ — comanda optimă care duce punctul $\xi_{tk}(p_k)$, în 0;

3) $x_k : [0, t_k] \to X$ — traiectoria optimă corespunzătoare, deci $x_k(0) = \xi_{tk}(p_k)$, $x_k(t_k) = 0$;

4) $x_{*k} : [0, t_k] \to X$ — traiectoria cauzată de comanda din condiția inițială

$$x_{*k}(0) = x_*.$$

Atunci $\lim_{k\to\infty} \| x_{*k}(t_k) \| = 0$;

Demonstrație. Din definițiile traiectoriilor x_k și x_{*k} rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{*k}(t) - x_k(t)) = A(x_{*k}(t) - x_k(t)), \quad t \in [0, t_k].$$

Dar orice soluție $y : [0, t_k] \to X$ a ecuației liniare omogene $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ay$ cu $t \in [0, t_k]$ verifică inegalitatea

$$\| y(t) \| \leqslant \| y(0) \| \, e^{t\|A\|},$$

deci în particular

$$\| x_{*k}(t_k) \| = \| x_{*k}(t_k) - x_k(t_k) \| \leqslant \| x_{*k}(0) - x_k(0) \| \, e^{t_k\|A\|} =$$

$$= \| x_* - \xi_{tk}(p_k) \| \, e^{t_k\|A\|}.$$

Deoarece $\lim_{k\to\infty} \| x_* - \xi_{tk}(p_k) \| = 0$ și $0 \leqslant t_k \leqslant t_*$, rezultă relația din corolar.

Observație. Teorema lui Eaton permite construirea unui algoritm pentru determinarea numerică aproximativă a unui vector $p_* \in N_*$. Schema logică a acestui algoritm este cea din figura 21,

Scanned with OKEN Scanner

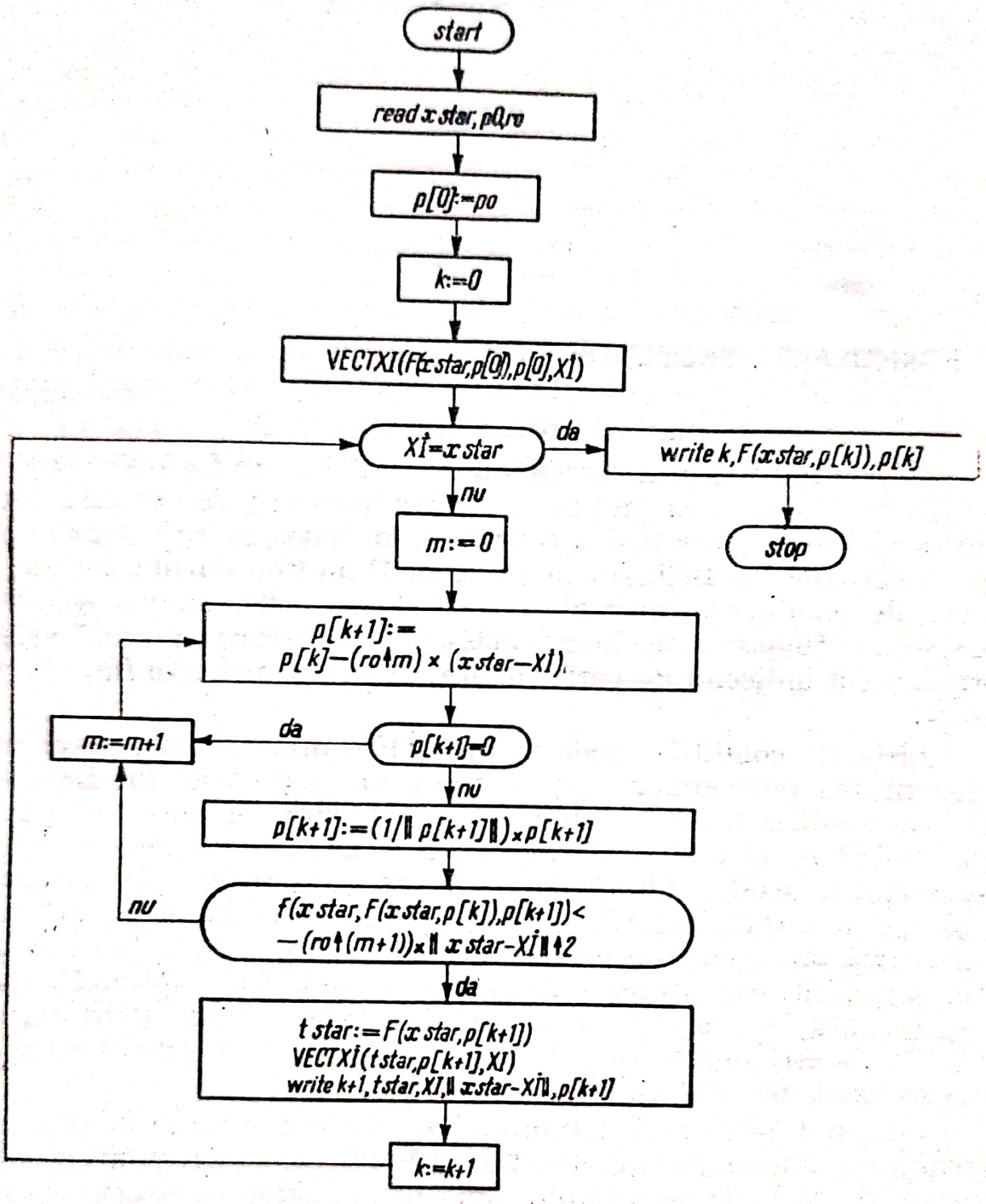


Fig. 21

unde prin VECTXI (t, p, XI), $f(x \text{ star}, t, p)$ și $F(x \text{ star}, p)$ s-au notat procedurile pentru calculul lui $\xi_t(p)$, $f(t, p)$ și $F(p)$ cu $x_* = x$ star dat.

CAPITOLUL 5 CONDIȚII SUFICIENTE DE OPTIMALITATE ÎN SENSUL LUI BOLTEANSKI

5.1. FORMULAREA PROBLEMEI

În capitolul 3, prin teorema 3 de la 3.3. s-au formulat condiţii de suficienţă pentru ca un proces de conducere să fie optimal. Ideea exprimării acestor condiţii a constat în a vedea în ce măsură o soluţie a ecuaţiei lui Bellman în maniera Hamilton-Jacobi descrie un proces de conducere optimală, adică de a vedea cînd o soluţie a ecuaţiei menţionate este chiar funcţia S a lui Bellman ataşată valorii optimizate a indicelui de performanţă, exprimat printr-o funcţională liniară.

Lista de condiţii a teoremei amintite pretinde în primul rînd continuitatea derivatelor parţiale ale soluţiei ecuaţiei lui Bellman. Această condiţie nu este totdeauna satisfăcută, în sensul că există „obstacole" în D unde funcţiile S_t şi S_x nu sînt continue; natura geometrică a acestor obstacole va fi precizată în cele ce urmează. Aşadar, există $Q \subset D \subset X^*$ astfel încît în fazele (t, x) ale acestei mulţimi proprietatea de continuitate a funcţiilor S_t şi S_x nu este asigurată. Mai mult, executarea unui proces de conducere optimală, care, în consecinţă, se supune principiului maximului lui Pontreaghin, obligă la „a străpunge" sau chiar la a situa conducerea, adică traiectoria de fază, pe obstacolul Q.

Ignorînd principiul maximului şi căutînd a pune în evidenţă sistemul canonic numai din ecuaţia lui Bellman, se cere continuitatea derivatelor parţiale de ordinul doi ale funcţiei S, lucru şi mai pretenţios.

Este meritul lui V.G. Bolteanski că a reuşit să furnizeze condiţii de suficienţă în spiritul principiului maximului, adăugînd la acestea aşa-numitele condiţii de sinteză regulată. Cerîndu-se, în esenţă, numai continuitatea funcţiei S, $S(t, x)$ fiind definită prin valoarea

Scanned with OKEN Scanner

indicelui de performanță a unei traiectorii care satisface principiul maximului și care pleacă din faza (t,x), se demonstrează că funcția S astfel introdusă verifică ecuația lui Bellman, exceptînd punctele obstacolului Q. Se demonstrează în continuare că acest lucru este suficient pentru a asigura optimalitatea traiectoriei amintite. Demonstrația lui Bolteanski este făcută în cazul sistemelor autonome optimizate în funcție de rapiditate, extensiunea pînă la cazul general necomplicînd esențial tehnica de demonstrare. În consecință, în cele ce urmează se va aborda problema de optimalitate, datorită autonomiei procesului, la nivelul spațiului $X=R^n$ al stărilor.

Să definim acum în mod riguros structura topologică a obstacolului reprezentat prin noțiunea de mulțime netedă pe porțiuni.

Fie $s \leqslant n$ și $K \subset R^s$ un poliedru convex (compact). Fie $A \supset K$ un domeniu în R^s și $\varphi : A \to R^n$, adică

$$A \ni (\xi^1 \ldots, \xi^s) = \xi \to \varphi(\xi) = (\varphi^1(\xi), \ldots \varphi^n(\xi)) \in R^n,$$

unde $\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^j}$ există și sînt continue în A. Dacă matricea

$$\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant s}},$$

are rangul s în K, atunci φ realizează „aplicarea netedă" a poliedrului K în R^n. Dacă, în plus, φ realizează o transformare în care la oricare două puncte diferite din K corespund prin φ două puncte distincte, mulțimea $\varphi(K) \subset R^n$ poartă numele de poliedru curb s-dimensional.

O mulțime $M \subset R^n$ se numește mulțime netedă pe porțiuni dacă

a) este o reuniune de poliedre curbilinii,

b) orice compact din R^n care se intersectează cu M, intersectează numai un număr finit de poliedre curbilinii ale acestuia. Dimensiunea maximă a poliedrului component impune dimensiunea lui M.

Exemplele cele mai generale studiate în privința integrării ecuației lui Bellman au arătat că obstacolul amintit mai sus este o mulțime netedă pe porțiuni.

Scanned with OKEN Scanner

Problema pe care o vom aborda se formulează astfel:

Fie

1) $G \subset X = R^n$ o mulțime deschisă;
2) $R^r \supset V \supset U$, V mulțime deschisă, iar U o parte a lui R^r descriind restricțiile variabilei de conducere u:
3) $f: G \times V \to X = R^n$, adică de forma $f(x,u)$, continuă, avînd $\frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial u^j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant r$, continue în $G \times U$;
4) $x_1 \in G$.

Să se formuleze condiții suficiente de optimalitate în sensul minimizării duratei procesului de conducere descris de

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

referitoare la conducerea efectuată din orice punct $x \in G$ către x_1, presupunîndu-se posibilă efectuarea acesteia.

Ecuația generală a lui Bellman este

$$S_t(t, x) + \inf_{v \in U} H(S_x(t, x), t, x, v) = 0$$

și devine în cazul autonomiei procesului de conducere

$$\inf_{v \in U} H(S_x(t, x), x, v) = 0,$$

unde $S(x)$ este (condițiile de suficiență permițînd demonstrarea acestui lucru) durata optimă, adică minimă, a procesului de conducere din x în x_1. Evident, $S(x_1) = 0$.

Vom avea în cazul optimizării, în funcție de rapiditate, ($f^\circ = 1$)

$$1 + \inf_{v \in U} < S_x(x), f(x, v) > = 0$$

sau

$$1 + \inf_{v \in U} \sum_{i=1}^{n} S_{x^i}(x) f^i(x, v) = 0.$$

Fie acum următoarea propoziție:

PROPOZIȚIA 1. Fie

1) $G \subset X = R^n$ o mulțime deschisă;

2) $U \subset R^r$,

3) $f: G \times U \to X$ continuă, cu $\frac{\partial f(x, u)}{\partial x^i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, continue în $G \times U$ descriind conducerea: $\dot{x} = f(x, u)$;

4) $x_1 \in G$;

5) pentru orice $x \in G$ există o comandă continuă pe porțiuni u_x care conduce x în x_1, $u_x(t) \in U$, traiectoria cauzată $x(t)$ fiind situată în întregime în G;

6) durata procesului de conducere din x în x_1 este descrisă de funcția $S: G \to R^1$ continuă, cu derivate parțiale continue în G ($S(x_1) = 0$ evident).

7) S satisface ecuația lui Bellman:

$$1 + \inf_{v \in U} < S_x(x), f(x, v) > = 0,$$

care poate fi scrisă și

$$< S_x(x), f(x, v) > \geqslant -1 \text{ , pentru orice } v \in U.$$

Atunci u_x este optimală.

Demonstrație. Fie t_0 momentul inițial și t_1 momentul final al conducerii și șirul de inegalități stricte:

$$t_0 < \tau_1 < \tau_2 \ldots < \tau_q < t_1,$$

unde $\tau_1, \ldots, \tau_q$ sînt momentele de discontinuitate ale comenzii u_*.

Pe orice interval de continuitate (τ_k, τ_{k+1}), $(k = 0, \ldots, q;$ $t_0 = \tau_0, t_1 = \tau_{q+1})$ avem

$$< S_x(x(t)), f(x(t), u_x(t)) > \geqslant -1$$

sau

$$< S_x(x(t)), \frac{dx(t)}{dt} > \geqslant -1$$

şi încă

$$\frac{dS(x(t))}{dt} \geqslant -1,$$

de unde

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{dS(x(t))}{dt}\, dt \geqslant -\tau_k - \tau_{k+1},$$

adică

$$S(x(\tau_{k+1})) - S(x(\tau_k)) \geqslant -\tau_k - \tau_{k+1}.$$

Sumînd în raport de k de la 0 la q, se obţine

$$S(x(t_1)) - S(x(t_0)) \geqslant t_0 - t_1,$$

deci

$$S(x_1) - S(x) \geqslant t_0 - t_1.$$

În definitiv avem

$$S(x) < t_1 - t_0,$$

adică durata procesului de conducere nu poate fi inferioară duratei $S(x)$ şi deci propoziţia 1 este demonstrată. Se vede imediat că propoziţia 1 furnizează de fapt o condiţie de suficienţă.

S-a demonstrat că, chiar dacă proprietatea de continuitate a funcţiei S şi ecuaţia lui Bellman nu sînt satisfăcute decît în $G \setminus M$, unde M este o mulţime netedă pe porţiuni de dimensiune $< n$, concluzia propoziţiei 1 este valabilă. Acest rezultat este foarte puternic, întrucît corespunde cazurilor reale cînd datorită obstacolelor reprezentate prin mulţimi de tipul mulţimii M, condiţiile exprimate prin continuitatea funcţiei S şi satisfacerea ecuaţiei lui Bellman nu sînt îndeplinite pe obstacol.

În consecinţă, în cele ce urmează vom parcurge următoarele etape :

a) se va arăta că, în condiţiile formulate de Boltianski, funcţia continuă $S : G \to R^1$, descriind durata procesului de conducere

din x în x_1 are derivate parţiale continue şi satisface ecuaţia lui Bellman în $G \setminus M$, M fiind o mulţime netedă pe porţiuni de dimensiune $< n$;

b) se va analiza extensiunea propoziţiei 1, formulată mai sus.

5.2. SINTEZA REGULATĂ

Acest paragraf este dedicat parcurgerii primei etape amintite.

Definiţie. Fie

1) $G \subset X = R^n$ o mulţime deschisă;

2) $U \subset V \subset R^r$, V mulţime deschisă;

3) $x_1 \in G$;

4) $f : G \times V \to X$, continuă pe $G \times U$, avînd $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial u^j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant r$, continue pe $G \times U$, descriind traseul de conducere $\dot{x} = f(x, u)$;

5) $v : G \to U$;

6) $N \subset G$ o mulţime netedă pe porţiuni de dimensiune $\leqslant n-1$;

7) $P^0 \subset P^1 \subset \ldots \subset P^{n-1} \subset P^n = G$;

$n + 1$ mulţimi netede pe porţiuni.

Se spune că $((P^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}, v)$, v fiind funcţia introdusă la 5), reprezintă o sinteză regulată pentru procesul de conducere:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, u),$$

finalizat în x_1 şi referitor la G, dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:

1.1.1. $P^0 \ni x_1$ este formată numai din puncte izolate în G.

1.2 $P^i \setminus (P^{i-1} \cup N)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, se compune din varietăţi netede i-dimensionale, numite i-celule. Punctele lui P^0 se numesc zero-celule. O n-celulă este însă un poliedru curbiliniu deschis:

1.3. v este continuă cu derivate parţiale continue în fiecare celulă, fiind posibil a fi prelungită, rămînînd continuă cu derivate parţiale continue, într-o vecinătate a celulei:

2. i-celulele se împart în celule de tipul 1 şi de tipul 2.

Scanned with OKEN Scanner

2.1. o i-celulă σ este de tipul 1 dacă :

2.1.1. prin fiecare punct a lui σ trece o singură traiectorie a ecuaţiei

$$\frac{dx}{dt} = f(x, v(x));$$

2.1.2. orice traiectorie care intră în σ iese din aceasta după un interval de timp finit;

2.1.3. există o $(i-1)$ celulă $\Pi(\sigma)$ prin care sau în care toate traiectoriile care trec prin σ părăsesc σ. Contactul cu $\Pi(\sigma)$ se face printr-un unghi diferit de zero şi cu viteză nenulă. Dacă σ este o *1*-celulă (de tipul 1), atunci ea reprezintă un arc de traiectorie al ecuaţiei $\dot{x} = f(x, v(x))$, care se îndreaptă cu viteză nenulă către o *zero* celulă;

2.2. O i-celulă σ diferită de x_1 este o i-celulă de tipul 2 dacă există o $(i+1)$-celulă de tipul 1, $\Sigma(\sigma)$ astfel încît din fiecare punct al lui σ iese o singură traiectorie a sistemului $\dot{x} = f(x, v(x))$ care intră imediat în $\Sigma(\sigma)$; v este continuă cu derivate parţiale continue pe $\Sigma(\sigma) \cup \sigma$.

2.3 Toate n-celulele sînt de tipul 1. Toate zero-celulele sînt de tipul 2.

Observaţii importante. a) Orice traiectorie a ecuaţiei $\dot{x} = f(x, v(x))$ se poate prelungi unic succesiv din celulă în celulă. Într-adevăr, să considerăm că o traiectorie se află la un moment dat într-o i-celulă σ de tipul 1. Ea se prelungeşte unic în σ, datorită lui 2.1.1, părăsind după un timp finit celula σ. Această traiectorie ia contact cu $(i-1)$-celula $\Pi(\sigma)$ în momentul cînd părăseşte σ. Ea va evolua în $\Pi(\sigma)$ dacă $\Pi(\sigma)$ este de tipul 1 sau va părăsi imediat $\Pi(\sigma)$, intrînd în i-celula $\Sigma(\Pi(\sigma))$ de tipul 1. Din $\Pi(\sigma)$ iese însă o singură traiectorie, conform cu 2.2.

Trebuie precizat că, dacă $\Pi(\sigma)$ este de tipul 1, atunci se vede imediat că este necesar ca traiectoria să se frîngă pentru a putea evolua în $\Pi(\sigma)$, contactul cu $\Pi(\sigma)$ făcîndu-se sub un unghi diferit de zero. Aşadar, pe $\sigma \cup \Pi(\sigma)$, v nu poate fi continuă, frîngerea traiectoriei reclamînd o discontinuitate a comenzii. Evident, lucrurile stau invers cînd $\Pi(\sigma)$ este de tipul 2, traiectoria fiind cu viteză continuă în $\Pi(\sigma) \cup \Sigma(\Pi(\sigma))$, şi deci este normal a se cere continuitatea lui v şi a derivatelor parţiale ale acestuia în $\Pi(\sigma) \cup \Sigma((\Pi\sigma))$. Dacă traiectoria se află într-o i-celulă σ de tipul 2, prelungirea ei în $\Sigma(\sigma)$ este imediat asigurată de 2.2.

Scanned with OKEN Scanner

b) O traiectorie pe care evoluția a încetat, după parcurgerea unui număr finit de celule se oprește în x_1. Aceasta rezultă imediat din procedeul de prelungire, observîndu-se că trecerea se face succesiv dintr-o celulă de tipul 1 tot într-o celulă de tipul 1 de aceeași dimensiune cu prima sau cu o unitate mai mică, ajungîndu-se treptat la o mișcare într-o *1*-celulă de tipul 1, care evoluează către o zero-celulă, iar dacă aceasta nu este x_1, conform cu 2.2, mișcarea continuă pe un alt arc de traiectorie (tot 1-celulă), care la un moment dat trebuie să se termine în x_1, căci în caz contrar fie că ar evolua pe un număr nelimitat de *1*-celule, fie durata de evoluție într-o *1*-celulă ar fi nelimitată, ceea ce este absurd. O traiectorie care ajunge în x_1 ca rezultat al parcurgerii unui număr finit de celule se numește traiectorie normală.

3. *3. 1.* Din orice punct a lui $G \setminus N$ iese o singură traiectorie normală.

3.2. Din orice punct a lui N iese o traiectorie normală, unicitatea nefiind obligatorie.

4. Toate traiectoriile normale se supun principiului maximului.

5. Durata procesului de conducere pe o traiectorie normală care pleacă din $x \in G$ este descrisă de o funcție $S : G \to R'$, continuă în G.

Observație. Dacă $x \in N$ și din acest punct pleacă două traiectorii normale, atunci durata procesului de conducere pe fiecare dintre ele este aceeași.

TEOREMA 1 (fundamentală). *Dacă* $((P^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}, v)$ *reprezintă o sinteză regulată a procesului de conducere descris de*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

finalizat în x_1 *și referitor la* G, *atunci*

1) *funcția* S *are derivate parțiale continue în* $G \setminus M$, *unde* $M = N \cup P^{n-1}$;

2) *funcția* S *satisface ecuația lui Bellman,*

$$1 + \inf_{v \in U} < S_x(x), f(x, v) > = 0$$

în $G \setminus M$.

Demonstrație. 1. Fie $x_0 \in \sigma$, σ fiind o n-celulă oarecare, deci de tipul 1, iar momentul inițial este considerat t_0. Atunci prin x_0 trece o singură traiectorie $x(t)$ a ecuației $\dot{x} = f(x, v(x))$ cu $x(t_0) = x_0$. Această traiectorie atinge $(i-1)$ — celula $\Pi(\sigma)$ după un timp $\theta_1(x_0)$, adică la momentul $t_0 + \theta_1(x_0)$, în punctul $\xi_1(x_0)$. Evident, dacă x_0 se deplasează „puțin" în alt punct x, contactul traiectoriei care trece prin x, cu $\Pi(\sigma)$ va avea loc la momentul $t_0 + \theta_1(x)$ în punctul $\xi_1(x)$.

Să studiem funcțiile θ_1 și ξ_1 în jurul lui x_0, precizîndu-se că totdeauna x_0 admite o vecinătate conținută în $G \setminus M$ (deschisă).

Fie, referitor la n-celula (de tipul 1) σ, ecuația

$$\frac{dy}{dt} = -f(y, v(y)),$$

care are aceleași traiectorii în σ ca $\dot{x} = f(x, v(x))$, dar parcurse în sens invers.

Fie $y(t, \xi)$ soluția ecuației de mai sus, inițializată prin

$$y(o, \xi) = \xi \in \Pi(\sigma), \ \xi \text{ vecin cu } \xi_1(x_0).$$

Evident,

$$y(\theta_1(x_0), \ \xi_1(x_0)) = x_0,$$

întrucît s-a parcurs invers traiectoria care a plecat din x_0 la momentul t_0 și a ajuns pe $\Pi(\sigma)$ la momentul $t_0 + \theta_1(x_0)$ în punctul $\xi_1(x_0)$, parcurgerea în sens contrar, deci cea descrisă de $\dot{y} = -f(y, v(y))$, fiind inițializată la $t = 0$ în $\xi_1(x_0)$.

Să studiem ecuația

$$y(t, \xi) = x$$

pentru ξ vecin cu $\xi_1(x_0)$ și x vecin cu x_0, pentru care s-a arătat că există soluția $t = \theta_1(x_0)$, $\xi = \xi_1(x_0)$, adică $y(\theta_1(x_0), \ \xi_1(x_0)) = x_0$.

Pentru soluționarea ecuației în vecinătățile amintite este suficient ca jacobianul

$$\left.\frac{D(y(t, \xi))}{D(t, \xi)}\right|_{t=\theta_1(x_0), \ \xi=\xi_1(x_0)} \neq 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

$\xi \in \Pi(\sigma)$ fiind varietate netedă $n-1$ dimensională, implică reprezentarea acestuia prin $(n-1)$ coordonate curbilinii $\eta^1, \ldots, \eta^{n-1}$, astfel încît matricea funcţională este pătratică: y avînd n componente dependente de n variabile: $t, \eta^1, \ldots, \eta^{n-1}$.

Vom avea

$$\left[\frac{D(y(t, \xi))}{D(t, \xi)}\right]_{t=0,\ \xi=\xi_1(x_0)} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial y^1}{\partial t} & \frac{\partial y^1}{\partial \eta^1} & \cdots \frac{\partial y^1}{\partial \eta^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial t} & \frac{\partial y^n}{\partial \eta^1} & \cdots \frac{\partial y^n}{\partial \eta^{n-1}} \end{array}\right]_{t=0,\ \xi=\xi_1(x_0)} = [-f(0, v(\xi_1(x_0))), y_{\eta^1}, \ldots, y_{\eta^{n-1}}],$$

unde $y_{\eta^1}, \ldots, y_{\eta^{n-1}}$ sînt vectorii tangenţi ai sistemului de coordonate curbilinii ai suprafeţei $\Pi(\sigma)$, consideraţi în punctul $\xi_1(x_0)$. Cum $-f(0, r(\xi_1(x_0))$ face un unghi diferit de zero (2.1.3,) cu planul tangent în $\xi_1(x_0)$, rezultă că $-f(0, v(\xi_1(x_0))), y_{\eta^1}, \ldots, y_{\eta^{n-1}}$ sînt liniar independenţi şi deci determinantul funcţional va fi diferit de zero în $t = 0, \xi = \xi_1(x_0)$.

Vectorii infinitezimali

$$-f(0, v(\xi_1(x_0)))\ \mathrm{d}t, y\eta^1 \mathrm{d}\eta^1, \ldots, y_{\eta^{n-1}}\ \mathrm{d}_{\eta^{n-1}}$$

continuă să rămînă liniar independenţi. Transportîndu-i cu ajutorul matricei fundamentale $\Xi(\theta_1(x_0), 0)$ a sistemului în variaţii, rezultă că

$$-\mathrm{d}t\,\Xi(\theta_1(x_0), 0) f(0, v(\xi_1(x_0))), \mathrm{d}\eta^1\,\Xi(\theta_1(x_0),$$

$$0)\, y\eta^1, \ldots, \mathrm{d}\eta^{n-1}\,\Xi(\theta_1(x_0), 0)\, y_{\eta^{n-1}}$$

sînt în continuare liniar independenţi, deoarece $\Xi(\theta_1(x_0), 0)$ este nedegenerată. Aşadar

$$\det(-\Xi(\theta_1(x_0), 0) f(0, v(\xi_1(x_0))), \Xi(\theta_1(x_0),$$

$$0)\, y_{\eta^1}, \ldots, \Xi(\theta_1(x_0), 0)\, y_{\eta^{n-1}}) \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest determinant însă descrie cu aproximaţia unui infinit mic, determinantul

$$\left.\frac{\Delta(y(t,\xi))}{\Delta(t,\xi)}\right|_{t=\theta_1(x_0),\ \xi=\xi_1(x_0)}.$$

care în consecinţă va fi diferit de zero.

Aşadar, ecuaţia $y(t, \xi) = x$ admite ca soluţii

$$t = \theta_1(x), \quad \xi = \xi_1(x),$$

care, în consecinţă, vor fi continue cu derivate parţiale continue. Continuînd raţionamentul referitor la mişcarea în $\Pi(\sigma)$ sau $\Sigma(\Pi(\sigma))$, durata de mişcare în acestă celulă fiind $\theta_2(x)$, iar punctul în care o părăseşte $\xi_2(x)$, se constată analog că $\theta_2(x)$ şi $\xi_2(x)$ depind continuu îu derivate parţiale continue de $\xi_1(x)$ şi, în consecinţă, de x. Astfel, cn jurul lui x_0 avem

$$S(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x) + \ldots,$$

conţinînd un număr finit de termeni, deoarece traiectoria este normală, S fiind deci cu derivate parţiale continue în jurul lui x_0. În concluzie, în jurul oricărui punct x_0 aparţinînd la oricare n-celulă, S_x este continuă şi deci continuă pe reuniunea tuturor n-celulelor, care este tocmai $G \setminus M$, după cum imediat se poate verifica. Astfel, prima parte a teoremei este complet demonstrată.

2. Să arătăm că S satisface ecuaţia lui Bellman în $G \setminus M$. Fie $x_0 \in G \setminus M$ şi t_0 momentul de plecare al traiectoriei normale care ajunge la $t = t_1$ în x_1.

Fie

$$\Sigma = \{x \in G \mid S(x) = S(x_0)\}.$$

Atunci în jurul lui x_0, Σ este o hipersuprafaţă netedă cu normala S_x continuă, conform primei părţi a teoremei : $S_x(x_0) \neq 0$, deoarece

$$< S_x(x_0), f(x_0, v(x_0)) > = \left.\frac{ds(x(t))}{dt}\right|_{t=t_0} = -1,$$

iar $f(x_0, v(x_0)) \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar traiectoria normală satisface principiul maximului şi deci, dacă $\psi(t)$ este soluţia nebanală a sistemului asociat avem

$$-\psi_0 = <\psi(t_0), f(x(t), v(x(t)))> \geqslant <\psi(t), f(x(t), u)>, \quad \psi_0 \leqslant 0,$$

pentru orice $u \in U$ şi $t \in [t_0, t_1]$.
Aşadar,

$$-\psi_0 = <\psi(t_0), f(x_0, v(x_0))> \geqslant <\psi(t_0), f(x, u)>,$$

pentru orice $u \in U$.

Se va arăta mai tîrziu, acceptînd deocamdată apriori, că $\psi(t_0) = -\lambda S_x(x)$. Cum $\psi(t_0) \neq 0$ şi $S_x(x_0) \neq 0$, rezultă că $\lambda \neq 0$. Rezultă

$$-\psi_0 = -\lambda <S_x(x_0), f(x_0, v(x_0))> = -\lambda(-1) = \lambda \text{ şi deci } \lambda > 0$$

Vom avea în consecinţă din principiul maximului

$$\lambda = -<\lambda S_x(x_0), f(x_0, v(x_0))> \geqslant -<\lambda S_x(x_0), f(x, u)>$$

sau, simplificînd cu $\lambda > 0$,

$-1 = <S_x(x_0), f(x_1 v(x_0))> \leqslant <S_x(x_0), f(x, u)>$, pentru orice $u \in U$,

adică

$$\inf_{u \in U} <S_x(x_0), f(x_0, u)> = -1.$$

Aşadar, în orice punct $x \in G \setminus M$ avem

$$1 + \inf_{v \in U} <S_x(x), f(x, u)> = 0.$$

Astfel şi partea a doua a teoremei este demonstrată, exceptînd relaţia

$$\psi(t_0) = -\lambda S_x(x_0) \quad \text{cu } \lambda > 0,$$

pe care o vom demonstra în cele ce urmează.

Fie σ_q, $\sigma_2, \ldots, \sigma_q$ celulele de tipul 1 prin care trece succesiv traiectoria normală $x(t)$ ce pleacă din $x_0 \in \sigma_1$ la $t=t_.$, iar σ_q fiind 1-celulă, deci un arc de traiectorie care se termină în x_1 la momentul t_1.

Fie $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{q-1}$ momentele de trecere din σ_1 în σ_2, σ_2 in $\sigma_3 \ldots \sigma_{q-1}$ in σ_q, iar $t_0=\tau_0$, $t_1=\tau_q$. Evident, $\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_{q-1}<\tau_q$. În intervalul (τ_{i-1}, τ_i), traiectoria se află în celula σ_i, părăsind-o la momentul τ_i în punctul $x(\tau_i) \in \Pi(\sigma_i)$, interior evident lui $\Pi(\sigma_i)$. Dacă acum $x_0^* \in \sigma_1$ (evident punct interior), traiectoria care pleacă din x_0^* la $t=t_0$ va parcurge întocmai aceleaşi celule $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ în mod succesiv.

Fie $x_0^* \in \Sigma$ suficient de apropiat de x_0. Atunci ambele traiectorii ajung în acelaşi timp $S(x_0) = S(x_0^*)$ in x_1. Vom considera în mod analog $\tau_0 < \tau_0^* < \ldots < \tau_{q-1}^* < \tau_q$ şi corespunzător punctele $x^*(\tau_1^*), \ldots, x^*(\tau_{q-1}^*)$, aflate în interiorul celulelor $\pi(\sigma_1), \ldots, \pi(\sigma_{q-1})$.

Dacă x_0^* este suficient de apropiat de x_0, atunci evident $\tau_{i-1} < \tau_i^*$ şi $\tau_{i-1}^* < \tau_i$. Fie δ_i intervalul de timp dintre τ_i şi τ_i^*, $i=1, \ldots, q-1$. Pentru x_0^* suficient de apropiat de x_0, intervalele $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{q-1}$ se dispun pe axa timpului unul după altul, între fiecare existînd o anumită distanţă. Vom nota cu Δ_1 intervalul de la $t_0=\tau_0$ la extremitatea stîngă a lui δ_1, cu Δ_2 intervalul de la extremitatea dreaptă a lui δ_1 la extremitatea stîngă a lui δ_2 şi aşa mai departe, cu Δ_q intervalul de la extremitatea dreaptă a lui δ_{q-1} la $t_1=\tau_q$. În acest fel, $\Delta_1, \delta_1, \Delta_2, \delta_2, \ldots, \delta_{q-1}, \Delta_q$ reprezintă o partiţie a intervalului $[t_0 t_1]$.

Pe baza celor demonstrate la 1 avem

$$|\tau_1^* - \tau_1| = C_1' \| x_0 - x_0^* \|, \quad \| x^*(\tau_1^*) - x(\tau_1) \| = C_1'' \| x_0 - x_0^* \|,$$

C', C'' exprimîndu-se cu ajutorul derivatelor parţiale continue ale funcţiilor τ_1 şi x_1 în raport cu coordonatele punctului iniţial. Continuînd acest tip de raţionament, se ajunge imediat la concluzia că există $C > 0$ astfel încît

$$\| \delta_1 \| \leqslant C\varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant q-1, \text{ şi } \| x^*(t) - x(t) \| \leqslant C\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \varepsilon = \| x_0^* - x_0 \|.$$

Vom avea, ţinînd cont că $x(t_1) = x^*(t_1) = x_1$,

$$< \psi(t_0), x^*(t_0) - x(t_0) > = < \psi(t_0), x^*(t_0) - x(t_0) > - < \psi(t_1),$$

$$x^*(t_1) - x(t_1) > = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < \psi(t), x^*(t) - x(t) > \mathrm{d}t =$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big(<\frac{d\psi}{dt}, x^*(t)-x(t)>+<\psi(t),\ f(x^*(t),\ v(x^*(t)))-$$

$$-f(x(t), v(x(t)))>)\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}(\mathcal{H}(\psi(t),\ x^*(t),\ v(x^*(t)))-$$

$$-\mathcal{H}(\psi(t),\ x(t),\ v(x(t)))-<\mathcal{H}_x(\psi(t),\ x(t),\ v(x^*(t))),\ x^*(t)-$$

$$-x(t)>)\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}(\mathcal{H}(\psi(t),\ x(t),\ v(x^*(t)))-$$

$$-\mathcal{H}(\psi(t),\ x(t),\ v(x(t)))+<\mathcal{H}_x(\psi(t),\ \xi,\ v(x^*(t)))-$$

$$-\mathcal{H}_x(\psi(t),\ x((t),\ v(x\ (t))),\ x^*(t)-x(t)>)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant-\int_{t_0}^{t_1}<\mathcal{H}_x(\psi(t),\ \xi, v(x^*(t)))-\mathcal{H}_x(\psi(t),\ x(t)),\ v(x(t))),\ x^*(t)-$$

$$-x(t)>dt \text{ şi } \xi\in[x^*(t),\ x(t)],$$

inegalitate rezultată imediat din principiul maximului.

Dacă $t\in\Delta_\iota$, atunci, evident, $x(t)$ şi $x^*(t)$ se găsesc în aceeaşi celulă, iar v are derivate parţiale continue în această celulă, segmentul $[x^*(t),\ x(t)]$ găsindu-se în întregime situat în celulă. Se aplică deci teorema creşterilor finite care conduce la

$$\|v(x^*(t))-v(x(t))\|\leqslant C'\|x^*(t)-x(t)\|\leqslant C'C\varepsilon,\ \|\xi-$$

$$-x(t)\|\leqslant\|x^*(t)-x(t)\|\leqslant C\varepsilon.$$

Avînd în vedere continuitatea funcţiei $\mathcal{H}_x$, se vede că

$$\mathcal{H}_x(\psi(t),\ \xi,\ v(x^*(t)))-\mathcal{H}_x(\psi(t),\ x(t),\ v(x(t)))$$

Scanned with OKEN Scanner

tinde către zero odată cu ε. În consecinţă,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Delta_i} < \mathcal{H}_x(\psi(t), \xi, v(x^*(t))) -$$

$$- \mathcal{H}_x(\psi(t), \dot{x}(t), v(x(t))), x^*(t) - x(t) > dt = 0.$$

Dacă $t \in \delta_i$, atunci

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\delta_i} < > dt = 0,$$

deoarece, aplicînd teorema de medie, $\frac{\| \delta_i \|}{\varepsilon} \leqslant C$, iar $\| x^*(t) - x(t) \| \to 0$ cînd $\varepsilon \to 0$. În consecinţă,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} < > dt = 0.$$

Aşadar,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \frac{x^*(t_0) - x(t_0)}{\varepsilon}, \psi(t_0) > \leqslant 0$$

şi, cum $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^*(t_0) - x(t_0)}{\varepsilon} = p$ — vector tangent arbitrar la hipersuprafaţa Σ în punctul x_0, rezultă că pentru orice vector p tangent la Σ în x_0 este valabilă inegalitatea

$$< p, \psi(t_0) > \leqslant 0,$$

de unde în mod obligatoriu rezultă că

$$< p, \psi(t_0) > = 0$$

sau

$$\psi(t_0) \perp \Sigma \text{ in } x_0.$$

Astfel teorema este complet demonstrată.

5.3. CONDIŢIILE DE SUFICIENŢĂ REZULTATE DIN ECUAŢIA LUI BELLMAN

În paragraful 5.2 am arătat că satisfacerea principiului maximului şi a condiţiilor de sinteză regulată implică satisfacerea ecuaţiei lui Bellman în $G \setminus M$, unde $M = P^{n-1} \cup N$ — mulţime netedă pe porţiuni. În cele ce urmează vom arăta că acest lucru este suficient pentru a asigura optimalitatea în G. Rezultatele din acest paragraf, aşa cum de altfel am mai precizat, reprezintă de fapt extensiunea propoziţiei 1 de la 5.1. Vom demonstra acum teorema care reflectă slăbirea condiţiilor propoziţiei 1, dar care furnizează acelaşi rezultat.

TEOREMA I^a (fundamentală). Fie

1) $G \subset X$ *o mulţime deschisă*;
2) $M \subset G$ *o mulţime netedă pe porţiuni*;
3) $x_1 \in G$;
4) $S : G \to R^1$ *continuă, avînd derivate parţiale continue în* $G \setminus M$;
5) *în* $G \setminus M$ *este satisfăcută ecuaţia*

$$\inf_{v \in U} < f(x, v), S_x(z) > = -1 \text{ cu } S(x_1) = 0;$$

6) *pentru orice punct* $x_0 \neq x_1$ *din* G *există o comandă care-l transportă în* x_1, *traiectoria fiind situată în întregime în* G *şi pentru care timpul de conducere este descris de funcţia* S, *adică* $t_1 - t_0 = S(x_0)$.

Atunci comanda şi traiectoria sînt optimale adică transportul din x_0 *în* x_1 *se face în minimum de timp.*

Demonstraţie. Demonstraţia va fi împărţită în patru părţi, din care primul rezultat va fi cel esenţial.

Fie $L = \varphi(K)$ un poliedru curbiliniu în G de dimensiunea $\leqslant n-1$ şi $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, o traiectorie conţinută în întregime în G. Vom spune că traiectoria este în poziţie normală cu L dacă

a) în cazul cînd dim. $L \leqslant n-2$, traiectoria nu intersectează L;

b) în cazul cînd dim. $L = n-1$, trebuie îndeplinite trei condiţii:

1) traiectoria nu are cu bordurile lui L nici un punct comun;

2) $\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}$ fiind punctele de discontinuitate ale comenzii, iar $t_0 = \tau_0$, $t_1 = \tau_k$, atunci $x(\tau_0)$, $x(\tau_1)$, $\ldots$, $x(\tau_k)$ nu aparţin nici unul mulţimii L;

3) în punctele în care $x(t)$ intersectează L, vectorul tangent la traiectorie $f(x(t), u(t))$ nu este situat în planul tangent la L, dus într-unul din acele puncte; cu alte cuvinte, incidența dintre $x(t)$ și L se face sub un unghi diferit de zero.

A. Demonstrăm acum prima parte a teoremei, care constă în a arăta că, dacă

1) $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, este o traiectorie cauzată de $u(t)$, unind x_0 cu x_1 și situată în întregime în G;

2) $L \subset G$ un poliedru curbiliniu de dimensiune $\leqslant n-1$. Atunci, oricare ar fi $\mathcal{V}(x_0)$, o vecinătate în G a lui x_0, există $V \subset \mathcal{V}(x_0)$, o vecinătate astfel încît pentru orice $y_0 \in V$ soluția ecuației $\dot{y} = f(y, u(t))$ cu $y(t_0) = y_0$ este determinată pe $[t_0, t_1]$ și se află în poziție normală cu L.

Cazul I: dim. $L \leqslant n-2$. În acest caz este suficient a arăta că $y(t)$ nu se intersectează cu L. Fie $\mathcal{V}(x_0)$ suficient de mică astfel încît (din teoremele de existență și continuitate ale soluțiilor) pentru orice $y_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ soluția $y(t)$ a ecuației $\dot{y} = f(y, u(t))$, $y(t_0) = y_0$ este în întregime conținută în G pentru $t \in [t_0, t_1]$.

Fie N o varietate fără borduri, de aceeași dimensiune cu L care conține pe L (lucru posibil din definiția lui L). Atunci $N \times [t_0, t_1]$ este o varietate cu bordură, după cum imediat se poate vedea, avînd dimensiunea $\leqslant n-1$. Fie

$$P = \{(x', t') \in N \times [t_0, t_1] \mid \text{soluția } x(t; x', t') \text{ este determinată pe } [t_0, t_1]\}.$$

Evident, $P \subset N \times [t_0, t_1]$ este o subvarietate deschisă în N.
Fie $\psi: P \to G$ prin egalitatea

$$\psi(x', t') = x(t_0; x', t'),$$

evident continuă.

Să arătăm că $\psi(P)$ este o mulțime de prima categorie, adică este o reuniune numărabilă de mulțimi rare în G.
Fie

$$P_i = \{(x', t') \in P \mid t' \in [\tau_{i-1}, \tau_i]\}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Atunci

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} P_i \text{ şi } \psi(P) = \bigcup_{i=1}^{k} \psi(P_i).$$

Va fi deci suficient să arătăm că $\psi(P_i)$ este de prima categorie. Pentru $(x', t') \in P_i$ avem

$$\psi(x', t') = x(\tau_0; x', t') = x(\tau_0; x(\tau_1; x', t'), \tau_1),$$

$$x(\tau_1; x', t') = x(\tau_1; x(\tau_2; x', t'), \tau_2),$$

. . . . . .

$$x(\tau_{i-2}; x', t') = x(\tau_{i-2}; x(\tau_{i-1}; x', t'), \tau_{i-1}).$$

Or, pe $[\tau_{i-1}, t']$ comanda fiind continuă, funcţia $x(\tau_{i-1},,)$ este de clasă C^1 în raport cu x' şi t'. În mod analog se vede că se obţine o succesiune de compuneri de funcţii de clasă C^1, apartenenţa funcţiilor la această clasă fiind asigurată de diferenţiabilitatea în raport cu condiţiile iniţiale a soluţiei unice pentru intervalele de continuitate ale comenzii.

Aşadar, în final $\psi : P_i \to G$ este de clasă C^1 şi deci $\psi(P_i)$ (dim. $P_i \leqslant n-1$) este rară, rezultînd că şi $\psi(P)$ este rară. Concluzie: există puncte y_0 în $\mathcal{V}(x_0)$ astfel încît $y_0 \notin \psi(P)$. Fie y_0 un astfel de punct. Atunci $y(t; y_0, t_0)$ există evident pe $[t_0, t_1]$ şi nu intersectează N. Într-adevăr, dacă $(y(t'), t') \in N \times [t_0, t_1]$, atunci, conform unicităţii, $y(t; y(t'), t') \equiv y(t; y_0, t_0)$ şi deci $y(t_0; y(t'), t') = y_0 \in \psi(P)$, ceea ce este absurd. Cu atît mai mult $y(t; y_0, t_0)$ nu va intersecta L. L fiind un compact şi ţinînd cont de continuitatea în raport cu condiţiile iniţiale, rezultă că există $\mathcal{V}(y_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$ astfel încît orice soluţie iniţializată în $\mathcal{V}(y_0)$ să nu intersecteze L pe intervalul $[t_0, t_1]$.

Cazul II: dim. $L = n-1$. Conform cazului I şi ţinînd cont că L are un număr finit de borduri de dimensiune $< n-1$, există o vecinătate $V_1 \subset V(x_0)$ astfel încît orice soluţie iniţializată în V_1 e determinată pe $[t_0, t_1]$, neintersectînd bordurile lui L. Astfel prima condiţie de normalitate a traiectoriei este demonstrată.

Demonstrăm a doua condiţie pentru ca o traiectorie să fie în poziţie normală. Fie $N \supset L$ o varietate fără borduri de aceeaşi di-

mensiune cu L și fie $N_i = \{x' \in N \mid x(t;\ x',\ \tau'),$ determinată pe $[\tau_0,\ \tau_i]\}$.
Evident, N_i este o subvarietate fără borduri a lui N sau deschisă în N. Fie $\psi_i : N_i \to G$ prin egalitatea $\psi_i(x') = x(t_0;\ x',\ \tau_i)$.

Ca și mai sus, se arată că ψ_i este de clasă C^1 pe N_i. Așadar, $\psi_i(N_i)$ este de prima categorie, iar $\bigcup_{i=0}^{k} \psi_i(N_i)$ de prima categorie.

Există deci $y_0 \in V_1$ astfel încît $y_0 \notin \bigcup_{i=0}^{k} \psi_i(N_i)$. Atunci $y(t;\ y_0,\ t_0)$ nu are nici unul dintre punctele $y\ (\tau_i)$ aparținînd lui N. Într-adevăr, în caz contrar $y(\tau_i;\ y_0, t_0) \in N$ și, cum $y\ (t;\ y_0,\ t_0) \equiv y(t;\ y(\tau_i;\ y_0, t_0),\ \tau_i)$ determinată pe $[\tau_0,\ \tau_i]$, înseamnă că $y_0 \in \psi\ (N_i)$, ceea ce este absurd. Cu atît mai mult $y(\tau_i;\ y_0,\ t_0) \in L$. Cum L este compactă, va exista o vecinătate $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$ astfel încît, pentru orice $y_0 \in \mathcal{V}_2$, $y(t;\ y_0,\ t_0)$ determinată pe $[t_0, t_1]$, nu intersectează la nici un moment $t = \tau_i$, $i = 0,1, \ldots, k$, poliedrul curbiliniu L.

Fie acum de demonstrat ultima condiție de normalitate.
$N \times [t_0,\ t_1]$ este o varietate cu bordură, n-dimensională;

$$Q = \{(x', t') \in N \times [t_0,\ t_1] \mid x(t;\ x',\ t') \text{ determinată de } [t_0,\ t']\};$$

$$Q_i = \{(x', t') \in Q \mid t' \in [\tau_{i-1},\ \tau_i]\},\ 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Atunci, introducînd $\psi : Q \to G$ prin $\psi(x', t') = x(t_0; x', t')$, se arată că ψ este de clasă C^1 relativ la Q_i, analog ca la cazul I, și deci ψ este de clasă C^1 relativ la Q. De menționat că, deoarece dim. $Q = n$, $\psi(Q)$ nu mai este obligatoriu să fie o mulțime de prima categorie. Fie $y_0 \in V_2$ și $x(t; y_0, t_0)$ traiectoria corespunzătoare, tangentă la N în $x(t';\ y_0,\ t_0)$ și unde, evident, $t' \notin \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k\}$,
$x(t' + \mathrm{d}t;\ x',\ t') = x' + \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$ fiind un vector tangent la N. Atunci $x(t' + \mathrm{d}t;\ x' + \mathrm{d}x,\ t' + \mathrm{d}t) = x(t' + \mathrm{d}t, x', t')$, căci, evident,

$$x(t' + \mathrm{d}t;\ x' + \mathrm{d}x,\ t' + \mathrm{d}t) = x' + \mathrm{d}x.$$

Atunci, pe baza teoremei unicității, $x(t; x', t') = x(t;\ x' + \mathrm{d}x, t' + \mathrm{d}t)$ sau $x(t_0;\ x',\ t') = x\ (t_0;\ x' + \mathrm{d}x,\ t' + \mathrm{d}t)$. Deci, în definitiv, $\psi(x', t') = \psi(x' + \mathrm{d}x,\ t' + \mathrm{d}t)$. Se spune în acest caz că $(x',\ t')$ este un punct neregulat a lui ψ și, în consecință, $\psi(x', t') = y_0$ este de asemenea un punct neregulat a lui $\psi\ (Q)$. Mulțimea acestor

puncte este de prima categorie. Există deci $y_0 \in \mathcal{V}_2$ astfel încît y_0 să nu fie punct neregulat. Din continuitatea în raport cu condiţiile iniţiale şi din faptul că L este un compact rezultă că există o vecinătate V în $\mathcal{V}_3$, astfel încît traiectoria iniţializată în oricare din punctele lui V este în poziţie normală cu L.

Concluzie importantă. O astfel de traiectorie se taie cu L de un număr finit de ori. În caz contrar, prin faptul că L este un compact, punctele de intersecţie vor avea un punct de acumulare care este sau pe bordură sau punct de tangenţă, ceea ce este absurd. Sînt eliminate de asemenea punctele de discontinuitate ale vitezei prin condiţia a doua de normalitate.

B. Trecem acum la demonstrarea părţii a doua a teoremei, care constă în a arăta că, dacă

1) $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ este o traiectorie care uneşte x_0 cu x_1 situată în întregime în G,

2) M o mulţime netedă pe porţiuni de dimensiune $\leqslant n-1$, atunci în vecinătatea $V(x_0)$ a lui x_0 introdusă la A, există o vecinătate V astfel încît $y(t\,;\, y_0, t_0)$, $y_0 \in V$, este determinată pe $[t_0, t_1]$ în întregime conţinută în G şi intersectînd într-un număr finit de puncte mulţimea M. Fie W o vecinătate a traiectoriei $x(t)$, conţinută în G. Atunci W va intersecta numai un număr finit de poliedre curbilinii $L_1, \ldots, L_q$. În consecinţă, există $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}(x_0)$ astfel încît orice traiectorie iniţializată în $\mathcal{V}'$ se găseşte în W, deci va tăia acelaşi număr finit de poliedre curbilinii $L_1, \ldots, L_q$. Conform cu A, există o vecinătate $V_1 \subset \mathcal{V}'$ astfel încît traiectoria iniţializată în V_1 este în poziţie normală cu L_1. Continuînd raţionamentul va exista V_q cu $V_q \subset V_{q-1} \subset \ldots \subset V_1 \subset \mathcal{V}'$, astfel încît traiectoria iniţializată în V_q va fi în poziţie normală cu L_q şi deci cu toate poliedrele curbilinii $L_1, \ldots, L_q$, intersectîndu-se cu fiecare în parte de un număr finit de ori, deci cu mulţimea M de asemenea de un număr finit de ori.

C. Să arătăm acum că, dacă o traiectorie uneşte x_0 la t_0 cu x_1 la t_1 şi se taie cu M într-un număr finit de puncte, atunci este valabilă proprietatea : $S(x_0) - S(x_1) = S(x_0) \leqslant t_1 - t_0$. Demonstraţia este imediată, făcîndu-se analog ca la propoziţia 1 de la 5.1, aplicînd această propoziţie între momentele de intersecţie cu M.

D. Fie acum din nou traiectoria $x(t)$ ($x(t) = x_0$, $x(t_1) = x_1$). Există atunci în $\mathcal{V}(x_0)$ introdusă la A o vecinătate V astfel încît orice traiectorie $y(t)$ care pleacă din V la t_0 se taie cu M într-un număr finit de puncte, ajungînd la t_1 într-un punct oarecare din G.

Scanned with OKEN Scanner

Este respectată, aşadar, proprietatea de la C. Se alege $V(x_0)$ suficient de mică pentru ca, dacă $x \in V(x_0)$, să avem

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant \varepsilon,$$

$$|S(y(t_1; x, t_0))| \leqslant \varepsilon, \text{ căci } S(x_1) = 0.$$

Fie atunci $y(t_0) \in V \subset \mathcal{V}(x_0)$. Evident, conform cu C, avem

$$S(y(t_0)) - S(y(t_1)) \leqslant t_1 - t_0.$$

Atunci

$$S(y(t_0)) - S(y(t_1)) \geqslant S(y(t_0)) - \varepsilon \geqslant S(x_0) - \varepsilon - \varepsilon = S(x_0) - 2\varepsilon,$$

deci

$$S(x_0) \leqslant t_1 - t_0 + 2\varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ şi, la limită, $S(x_0) \leqslant t_1 - t_0$.

Cum $S(x_0) = t_1 - t_0$, rezultă că un timp de conducere mai scurt decît $t_1 - t_0$ din x_0 în x_1, sub acţiunea comenzii care a generat $x(t)$ nu este posibil. Astfel traiectoria este optimală.

În concluzie, etapele de demonstrare ale teoremei au fost:

a) Considerîndu-se

— $M \subset G$ un obstacol reprezentat de o mulţime netedă pe porţiuni de dimensiune $\leqslant n - 1$;

— $x_1 \in G$;

— din fiecare punct $x_0 \neq x_1$ aparţinînd lui G există o comandă u_{x_0} care conduce x_0 în x_1, traiectoria $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, fiind în întregime conţinută în G;

— durata conducerii pe această traiectorie şi nu pe alta care eventual leagă x_0 cu x_1 şi este de asemenea conţinută în G este descrisă de o funcţie continuă de x_0 cu derivate parţiale continue în $G \setminus M$,

b) se arată că în vecinătatea acestei traiectorii există o altă traiectorie $y(t)$ care taie obstacolul M într-un număr finit de puncte

definită pe $[t_0, t_1]$ și conținută în întregime în G. Această traiectorie are proprietatea

$$S(y(t_0)) - S(y(t_1)) \leqslant t_1 - t_0;$$

c) dacă $y(t_0)$, $y(t_1)$ sînt suficient de vecini cu x_0, respectiv x_1, lucru posibil datorită continuității soluției în raport cu condițiile inițiale, atunci se demonstrează că

$$S(x(t_0)) = S(x_0) \leqslant t_1 - t_0,$$

ceea ce pune în evidență optimalitatea traiectoriei $x(t)$ cauzată de comanda u_{x_0}.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 6

CRITERIUL GENERAL INTEGRAL PĂTRATIC

Unul dintre criteriile integrale uzitate este cel exprimat prin $f^0 = \| \|^2$; el va fi abordat în cele ce urmează folosind programarea pătratică funcțională, care furnizează în același timp și o metodă iterativă de calcul.

6.1. PROGRAMAREA PĂTRATICĂ FUNCȚIONALĂ

Definiție. Fie

1) H, un spațiu Hilbert;
2) $R : H \to H$ un operator pozitiv definit;
3) $h \in H$.

Se numește program pătratic minimizarea funcției descrise prin

$$Q : H \to R^1 \quad \text{cu} \quad Q(x) = < Rx, x > - 2 < h, x >.$$

TEOREMA 1 (existență și unicitate). *Dacă există* $m > 0$ *astfel ca pentru orice* $x \in H$

$$m \|x\|^2 \leqslant < R x, x >,$$

există x *unic în* H *care satisface programul pătratic.*

Demonstrație. Cazul 1: $\inf \{Q(x) \mid x \in H\} > - \infty$,

adică există $\alpha \in (- \infty, \infty)$ astfel ca

$$\inf \{ Q(x) \mid x \in H \} = \alpha .$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie

$$(x_n)_{1\leqslant n<\infty} \subset H \to Q(x_n) \to \alpha \ ;$$

atunci x_n este un şir Cauchy. Într-adevăr,

$$< R(x_n - x_m),\ x_n - x_m > = < Rx_n, x_n > + < Rx_m, x_m > -$$

$$- 2 < Rx_m,\ x_m >,$$

iar din

$$< R(x_n + x_m),\ x_n + x_m > = < Rx_n,\ x_n > + < Rx_m, x_m > +$$

$$+ 2 < Rx_n, x_m >$$

rezultă

$$< R(x_n - x_m),\ x_n - x_m > = 2 < Rx_n, x_n > + 2 < Rx_m, x_m > -$$

$$- < R(x_n + x_m),\ x_n + x_m > =$$

$$= 2\,Q(x_n) + 2\,Q(x_m) - 4\,Q\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) \leqslant 2Q(x_n) + 2Q(x_m) - 4\alpha =$$

$$= 2\,(Q(x_n) - \alpha) + 2\,(Q(x_m) - \alpha) \to 0.$$

Deci

$$< R(x_n - x_m),\ x_n - x_m > \to 0, \text{ adică şi } m \parallel x_n - x_m \parallel^2 \to 0$$

şi, conform teoremei Riesz-Fisher, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ există.

Să arătăm acum că $\bar{x}$ este unic. Vom presupune contrarul, adică:

$$\hat{x} \neq \bar{x} \to Q(\bar{x}) = Q(\hat{x}) = \alpha,$$

şi fie

$$x = (1 - \rho)\,\bar{x} + \rho\,\hat{x}.$$

Atunci

$$Q(x) = f(\rho) = < R((1-\rho)\bar{x} + \rho\hat{x}), (1-\rho)\bar{x} + \rho\hat{x} > - 2 < h, (1 -$$

$$- \rho)\bar{x} + \rho\hat{x} > = (1-\rho)^2 < R\bar{x}, \bar{x} > + \rho^2 < R\hat{x}, \hat{x} > + 2\rho(1 -$$

$$- \rho) < R\bar{x}, \hat{x} > - 2(1-\rho) < h, \bar{x} > - 2\rho < h, \hat{x} > = (< R\bar{x}, \bar{x} > +$$

$$+ < R\hat{x}, \hat{x} > - 2 < R\bar{x}, \hat{x} >)\rho^2 + 2(- < R\bar{x}, \bar{x} > + < R\bar{x}, \hat{x} > +$$

$$+ < h, \bar{x} > - < h, \hat{x} >)\rho + \ldots = (< R\bar{x}, \bar{x} - \hat{x} > - < R\hat{x}, \bar{x} -$$

$$- \hat{x} >)\rho^2 + 2(< R\bar{x} - h, \hat{x} > - < R\bar{x} - h, \bar{x} >)\rho + \ldots$$

$$= < R(\bar{x} - \hat{x}), (\bar{x} - \hat{x}) > \rho^2 - 2 < R\bar{x} - h, \bar{x} - \hat{x} > \rho + \ldots$$

Se vede că trinomul $f(\rho)$ avînd coeficientul lui ρ^2 strict pozitiv are un minim strict pentru

$$\rho_m = \frac{< R\bar{x} - h, \bar{x} - \hat{x} >}{< R(\bar{x} - \hat{x}), \bar{x} - \hat{x} >} \in (-\infty, \infty),$$

așa că

$$Q((1-\rho_m)\bar{x} - \rho_m\hat{x}) < Q(\bar{x}) = Q(\hat{x}).$$

Dacă
$\rho_m \in \{0,1\}$, relația este absurdă în sensul că există $x_m = (1 -$ $- \rho_m)\bar{x} + \rho_m\hat{x} \neq \bar{x}, \hat{x}$, adică x realizează minimul, ceea ce este absurd;

$$\rho_m = 0 \to f(\rho_m) < f(1) \to Q(\bar{x}) < Q(\bar{x});$$

$$\rho_m = 1 \to f(\rho_m) < f(0) \to Q(\hat{x}) < Q(\hat{x}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Se constată că ultimele două relaţii conduc la contradicţii evidente.

Deci $\bar{x} = \hat{x}$

Observaţie. $Q(0) = 0$ şi deci $\alpha \leqslant 0$.

Cazul 2: $\inf \{ Q(x) \mid x \in H \} = -\infty$; atunci se vede imediat că şirul $(x_n)_{1 \leqslant n \leqslant \infty}$ este divergent.

TEOREMA 2. *Dacă $\bar{x}$ este o soluţie a programului pătratic (unică dacă sînt îndeplinite condiţiile teoremei 1), atunci $R\bar{x} = h$.*

Demonstraţie. Pentru orice $z \neq 0$, $\rho \neq 0$ avem

$$Q(\bar{x}) \leqslant Q(\bar{x} + \rho z) =$$

$$= < R(\bar{x} + \rho z), \bar{x} + \rho z > - 2 < h, \bar{x} + \rho z > =$$

$$= Q(x) - 2 < R\bar{x} - h, z > \rho + \rho^2 < R z, z >.$$

Deci

$$< Rz, z, > \rho^2 - 2 < R\bar{x} - h, z > \rho \geqslant 0;$$

atunci pentru orice $\rho \neq 0$, $z \neq 0$ avem $< R\bar{x} - h, z > = 0$. Să presupunem contrarul: există atunci $z_0 \neq 0$ astfel ca $< R\bar{x} - h, z_0 > \neq 0$.

a) $< Rz_0, z_0 > > 0$; trinomul este nedegenerat şi pentru ρ în interiorul intervalului:

$$\left[0, \frac{< R\bar{x} - h, z_0 >}{< Rz_0, z_0 >}\right],$$

trinomul este negativ, ceea ce este o contradicţie.

b) $< R z_0, z_0 > = 0$; luînd $\varphi = - < R\bar{x} - h, z_0 > \neq 0$;

se ajunge de asemenea la o contradicţie.

Ecuaţia $Rx = h$ se numeşte ecuaţia Wiener — Hopf.

În cele ce urmează ne vom ocupa de cazul cînd $R = A + k$, $k \geqslant 0$, iar A este un operator complet continuu pozitiv definit.

Scanned with OKEN Scanner

6.2. SOLUȚIA ECUAȚIEI WIENER-HOPF

TEOREMA 3. *Dacă* $k > 0$, *atunci* $Rx = h$ *admite o singură soluție.*

Demonstrație. Fie corespunzător operatorului A suma directă: $H = \bar{H} \oplus \tilde{H}$, $\bar{H}$ având baza numărabilă

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots,$$

corespunzătoare valorilor proprii $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$, care, dacă formează un șir infinit, au ca punct de acumulare 0.

Fie deci formal

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} < x, \varphi_i > \varphi_i, \quad x_0 \in \tilde{H},$$

o soluție, adică

$$kx_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + k) < x, \varphi_i > \varphi_i = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} < h, \varphi_i > \varphi_i .$$

Adică

$$x_0 = \frac{1}{k} h_0 ;$$

$$< x, \varphi_i > = \frac{< h, \varphi_i >}{\lambda_i + k},$$

iar din

$$\left\| x - \frac{h_0}{k} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} < x, \varphi_i >^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{< h, \varphi_i >^2}{(\lambda_i + k)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{\infty} < h, \varphi_i >^2 =$$

$$= \frac{\|h\|^2}{k^2} < + \infty$$

rezultă $\| x \| < \infty$ şi în consecinţă putem scrie riguros

$$\hat{x} = \frac{1}{k} h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{< h, \varphi_i >}{\lambda_i + k} \varphi_i ,$$

soluţia ecuaţiei $Rx = h$

R fiind strict pozitiv definit şi avînd $m = k$ (vezi teorema 1), $\hat{x}$ este unica soluţie a ecuaţiei, căci în caz contrar există $z \neq 0 \rightarrow$ $\rightarrow Rz = 0$, ceea ce este absurd. Se poate scrie în definitiv

$$\bar{x} = \hat{x} = \frac{1}{k} h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{< h, \varphi_i >}{\lambda_i + k} \varphi_i ,$$

unde x este soluţia programului pătratic.

Observaţie importantă. Dacă $k = 0$, atunci este necesar ca $h \in \overline{H}$ $(h_0 = 0)$ şi suficient ca

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{< h, \varphi_i >^2}{\lambda_i^2} < + \infty,$$

condiţie care nu este întotdeauna satisfăcută, datorită convergenţei spre zero a valorilor operatorului complet continuu A.

Valoarea minimă a funcţionalei Q în $\bar{x}$ este

$$Q(\bar{x}) = < R\bar{x}, \bar{x} > - 2 < h, \bar{x} > = < R\bar{x} - h, \bar{x} > - < h, \bar{x} > =$$

$$= - < h, \bar{x} > .$$

TEOREMA 4. *Dacă* $k = 0$, *există totuşi un şir* $(\alpha_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *din* $\overline{H}$ *astfel încît*

$$\lim_{n \to \infty} \| A x_n - h \| = 0$$

$(h \in H)$, *fără ca şirul iniţial să aibă limită.*

Demonstrație. Considerăm

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{< h, \varphi_i >}{\lambda_i} \varphi_i ;$$

atunci

$$Ax_n = \sum_{i=1}^{n} < h, \varphi_i > \varphi_i ,$$

$$Ax_n - h = \sum_{i=n+1}^{\infty} < h, \varphi_i > \varphi_i ,$$

$$\| Ax_n - h \|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} < h, \varphi_i >^2 \to 0, \quad \text{cînd} \quad n \to \infty ,$$

deci teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 5 (fundamentală). *Dacă* $k = 0$, *șirul* $(Q(x_n))_{1 \leqslant n < \infty}$, *unde* $(x_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *este șirul definit la teorema 4, converge către valoarea minimă a funcționalei* Q, *deci către valoarea programului pătratic, fără ca* $(x_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *să fie convergent.*

Demonstrație. $Q(x) - Q(x_n) = < Ax, x > - 2 < h, x > -$

$$- < Ax_n, x_n > + 2 < h, x_n > =$$

$$= \| A^{1/2} x \|^2 - \| A^{1/2} x_n \|^2 - 2 < h, x - x_n > =$$

$$= \| A^{1/2} x \|^2 - \| A^{1/2} x_n \|^2 + 2 < Ax_n - h, x - x_n > - 2 < Ax_n, x - x_n > =$$

$$= \| A^{1/2} x \|^2 - < A^{1/2} x, A^{1/2} x_n > + \| A^{1/2} x_n \|^2 + 2 < Ax_n - h, x - x_n > =$$

$$= \| A^{1/2} x - A^{1/2} x_n \|^2 + 2 < Ax_n - h, x >,$$

unde s-a folosit relația

$$< Ax_n - h,\ x_n > = < \sum_{i=n+1}^{\infty} < h,\ \varphi_i > \varphi_i,\ \sum_{i=1}^{n} \frac{< h,\ \varphi_i >}{\lambda_i} \varphi_i > = 0,$$

deci

$$Q(x) - Q(x_n) \leqslant 2 < Ax_n - h,\ x >.$$

Cazul 1. $\lim\limits_{n\to\infty} Q(x_n) = -\infty$ atunci evident valoarea programului este $-\infty$.

Cazul 2. $\lim\limits_{n\to\infty} Q(x_n) = \alpha \in (-\infty, \infty) \to Q(x) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} Q(x_n) =$

$$= \alpha\,(< Ax_n - h,\ x > \to 0),$$

de unde, evident,

$$\inf \{Q(x) \mid x \in H\} = \alpha.$$

Cum însă

$$Q(x_n) = < Ax_n,\ x_n > - 2 < h,\ x_n > =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{< h,\ \varphi_i >^2}{\lambda_i} - 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{< h,\ \varphi_i >^2}{\lambda_i} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{< h,\ \varphi_i >^2}{\lambda_i},$$

rezultă că în cazul 2 seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{< h,\ \varphi_i >^2}{\lambda_i} = -\alpha$$

care este deci convergentă.

TEOREMA 6. Dacă $\alpha \in (-\infty, \infty)$, atunci

1) $\bar{\xi} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{< h,\ \varphi_i >}{\lambda_i^{1/2}} \varphi_i$

există;

2) $\bar{\xi}$ este o soluţie a ecuaţiei Wiener-Hopf modificate:

$$A^{1/2} x = h \ ;$$

3) $Q(\lim_{n\to\infty} x_n) = \alpha = - \| \bar{\xi} \|^2$;

4) soluţia generală a ecuaţiei Wiener-Hopf modificate este:

$$\hat{\xi} = \xi_0 + \bar{\xi}, \ \xi_0 \in \widetilde{H}.$$

Demonstraţie. 1) $\| \bar{\xi} \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<h, \varphi_i>^2}{\lambda_i} < + \infty$;

2) $A^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<h, \varphi_i>}{\lambda_i^{1/2}} \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} <h, \varphi_i> \varphi_i = h \quad (h \in \overline{H})$;

3) $Q(\lim_{n\to\infty} x_n) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<h, \varphi_i>^2}{\lambda_i} = \alpha = - \| \bar{\xi} \|^2$;

4) dacă $\hat{\xi}$ este soluţia generală, atunci

$$A^{1/2} (\hat{\xi} - \bar{\xi}) = 0 \to \hat{\xi} - \bar{\xi} \in \widetilde{H}.$$

6.3. METODA CELEI MAI RAPIDE PANTE

Principul metodei este analog celui din cazul unui spaţiu euclidian n dimensional R^n, astfel încît nu va mai fi expus, ci se va trata numai formalistica matematică.

Definiţie. Se numeşte semigradient $z = Rx - h = \frac{1}{2} \nabla Q(x)$.

Metoda formală. Fie

$$x = x_0 + \varepsilon z_0,\ z_0 = \frac{1}{2}\nabla Q(x_0);$$

atunci

$$Q(x) = Q(x_0 - \varepsilon z_0) = < R(x_0 + \varepsilon z_0)\, x_0 + \varepsilon z_0 > - 2 < h, x_0 + \varepsilon z_0 > =$$

$$= \varepsilon^2 < Rz_0, z_0, > + 2\varepsilon < Rx_0 - h,\ z_0 > + \ldots =$$

$$= \varepsilon^2 < Rz_0,\ z_0 > + 2\varepsilon \| z_0 \|^2 + \ldots$$

și, în consecință, calculînd $\dfrac{dQ(x_0 + \varepsilon z_0)}{d\varepsilon} = 0,$

rezultă

$$2\varepsilon_0 < Rz_0,\ z_0 > + 2 \|z\|^2 = 0,$$

și, dacă $< Rz_0,\ z_0 >> 0$, atunci

$$\varepsilon_0 = - \frac{\|z_0\|^2}{< Rz_0,\ z_0 >} z_0,$$

așadar formal $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\| z_n \|^2}{< Rz_n, z_n >} z_n$

definește iterația în metoda celei mai rapide pante.

TEOREMA 7. *Dacă* $< Rx, x >$ *este m-minorată*), deci este inclus și cazul* $k > 0$, *atunci*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|z_n\|^2}{< Rz_n,\ z_n >} z_n$$

definește un șir care converge către $\bar{x}$, *care există și este unic, conform teoremei 1.*

---

*) $< Rx, x > \geqslant m \| x \|^2$, $m > 0$.

Demonstrație :

$$Q(x_{n+1}) = Q(x_n + \varepsilon_n z_n) = \varepsilon_n^2 < Rz_n, z_n > + 2\varepsilon_n \|z_n\|^2 + Q(x_n) =$$

$$= \frac{\|z_n\|^4}{< Rz_n, z_n >^2} < Rz_n, z_n > - 2 \frac{\|z\|^4}{< Rz_n, z_n >} + Q(x_n) =$$

$$= Q(x_n) - \frac{\|z_n\|^4}{< Rz_n, z_n >};$$

adică

$$Q(x_{n+1}) = Q(x_1) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\|z_i\|^4}{< Rz_i, z_i >}.$$

Or, în cazul existenței lui $\bar{x}$, avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|z_i\|^4}{< Rz_i, z_i >} < +\infty \to \frac{\|z_i\|^4}{< Rz_i, z_i >} \to 0.$$

întrucît $Q(x_n)$ scade valoric permanent, dar nu nelimitat, fiind mărginit inferior de $Q(\bar{x})$.

Rezultă

$$\frac{\|z_i\|^4}{< Rz_i, z_i >} \geqslant \frac{\|z_i\|^4}{\|R\| \, \|z_i\|^2} = \frac{1}{\|R\|} \|z_i\|^2, \text{ adică } \|z_i\| \to 0,$$

dec

$$\lim_{i \to \infty} \| Rx_i - h \| = 0.$$

Observație importantă. Pînă în prezent nu s-au folosit decît proprietățile

1) $\alpha \in (-\infty, \infty)$;

2) R strict pozitiv definit (dar nu și m-minorarea lui $< Rx, x >$).

Să arătăm acum că $(x_n)_{1\leqslant n<\infty}$ este mărginit.

$$Q(x_n) = < Rx_n,\ x_n > - 2 < h, x_n > \geqslant m \|x_n\|^2 -$$

$$- 2 < h, x_n > = m\left(< m - \frac{h}{m},\ x_n > \right):$$

or,

$$< x_n - \frac{h}{m},\ x_n > = \frac{1}{2}\left(\left\| x_n - \frac{h}{m} \right\|^2 + \|x_n\|^2 - \frac{\|h\|^2}{m^2} \right),$$

deci

$$Q(x_n) \geqslant \frac{1}{2m}\left(\left\| x_n - \frac{h}{m} \right\|^2 + \|x_n\|^2 - \frac{\|h\|^2}{n^2} \right).$$

Dacă $\|x_n\| \to \infty$, atunci $Q(x_n) \to +\infty$, ceea ce este absurd. Aşadar,

$$< R(x_n - x_m), x_n - x_m > = < Rx_n - h - (Rx_m - h), x_n - x_m > \leqslant$$

$$\leqslant \|Rx_n - h - (Rx_m - h)\| \|x_n - x_m\| \leqslant (\|Rx_n - h\| +$$

$$+ \|Rx_m - h\|) \|x_n - x_m\| \to 0,$$

x_n fiind mărginit. Or, cum $< Rx, x >$ este minorată,

$$m\|x_n - x_m\|^2 \to 0, \text{ deci este şir Cauchy.}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x};$$

or,

$$R\tilde{x} = h.$$

Atunci $\bar{x} = \tilde{x}$, căci în caz contrar $\bar{x}$ este o soluţie a ecuaţiei $Rx = h$, şi R, fiind strict pozitiv definit, impune unicitatea $\bar{x} = \tilde{x}$.

TEOREMA 8. *Dacă* $k = 0$, *iar* $\alpha \in (-\infty, \infty)$, *atunci şirul* $(x_n)_{1 \leqslant n < \infty}$, *definit de metoda celei mai rapide pante, implică*

$$\lim_{n \to \infty} Q(x_n) = \alpha$$

fără ca şirul $(x_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *să fie convergent.*

Demonstraţie. Se pleacă cu primul pas din $\overline{H}$, astfel încît totdeauna

$$< Az_i, z_i > > 0.$$

or, din observaţia importantă de la teorema 7 rezultă că $z_i \to 0$, adică

$$\lim_{n \to \infty} \| Ax_n - h \| = 0.$$

Avem

$$Ax_n - h = Ax_n - A^{1/2}\overline{\xi} = A^{1/2}(A^{1/2}x_n - \overline{\xi});$$

or, cum operaţiile au loc în H, rezultă că şi $\lim_{n \to \infty} \| A^{1/2}x_n - \overline{\xi} \| = 0$:

$$Q(x_n) = < A^{1/2}x_n, \quad A^{1/2}x_n > - 2 < A^{1/2}\overline{\xi}, x_n > = \| A^{1/2}x_n \|^2 -$$

$$- 2 < \overline{\xi}, A^{1/2}x_n > + \| \overline{\xi} \|^2 - \| \overline{\xi} \|^2 = \| A^{1/2}x_n - \overline{\xi} \|^2 - \| \overline{\xi} \|^2 \to - \| \overline{\xi} \|^2,$$

astfel teorema este complet demonstrată.

6.4. CAZ PARTICULAR

Se va considera cazul cînd $A = L^*L^*)$, $h = L^*g$, unde

1) $L : H \to H^*$ complet continuu;
2) $g \in H^*$.

*) * Defineşte operaţia şi spaţiul adjunct.

PROPOZIȚIA 1. $L^*g \in \overline{H}$.

Demonstrație. Să presupunem că

$$L^*g = h_0 + h_1 \text{ cu } h_0 \in \tilde{H}, \quad h_1 \in \overline{H};$$

atunci

$$<h_0, L^*g> = \|h_0\|^2 = <Lh_0, g>.$$

Dar

$$L^*Lh_0 = 0 \to <h_0, L^*Lh_0> = 0 \to <Lh_0, Lh_0> = 0 \to Lh_0 = 0,$$

deci

$$\|h_0\|^2 = 0.$$

Consecință: h admite numai decompozabilitatea

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} <h, \varphi_i> \varphi_i.$$

Cazul 1: $k > 0$. Soluția programului pătratic prin ecuația Wiener-Hopf este

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<h, \varphi_i>}{\lambda_i + k} \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<L^*g, \varphi_i>}{\lambda_i + k} \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>}{\lambda_i + k} \varphi_i.$$

Cazul 2: $k = 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$:

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>}{\lambda_i^{1/2}} \varphi_i; \quad \alpha = -\|\bar{\xi}\|^2 = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>^2}{\lambda_i}.$$

Observație. Se reamintește că, în cazul metodei celei mai rapide pante, iterațiile se efectuează în H, astfel că $<Az, z> > 0$ dacă $z \neq 0$ $(z \in \overline{H})$.

6.5. DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ ÎN SPAȚIUL ADJUNCT H^*

Fie $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots,$

$$\varphi_1, \varphi_2 \ldots$$

spectrul lui L^*L;
atunci avem

PROPOZIȚIA 2. Valorile proprii ale operatorilor L^*L și LL^* sînt comune.

DEMONSTRAȚIE. a) λ_i este valoare proprie a lui LL^*:

$$L^*L\varphi_i = \lambda_i\varphi_i;$$

$$LL^*(L\varphi_i) = \lambda_i(L\varphi_i).$$

b) Dacă λ_k este o valoare proprie a lui LL^*, atunci ea este și pentru L^*L:

$LL^*\psi_k = \lambda_k\psi_k$;
$L^*L(L^*\psi_k) = \lambda_k(L^*\psi_k)$ cu $L^*\psi_k \in \overline{H}$ (conform proporției 1).
Corespondentul sistemului ortonormal $(\varphi_i)_{1 \leqslant i < \infty}$ este în H^*:

$$1 = <cL\varphi_i, cL\varphi_i> = c^2 <\varphi_i, L^*L\varphi_i> = c^2\lambda_i \to c = \frac{1}{\lambda_i^{1/2}}.$$

Deci

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots,$$

$$\frac{L\varphi_1}{\lambda_1^{1/2}}, \quad \frac{L\varphi_2}{\lambda_2^{1/2}}, \ldots$$

este spectrul lui LL^*, cu

$$\psi_i = \frac{L\varphi_i}{\lambda_i^{1/2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

şi reciproc :

$$\varphi_i = \frac{L^*\psi_i}{\lambda_i^{1/2}}.$$

Cazul 1 : $k > 0$:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>}{\lambda_i + k}\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, \psi_i>}{\lambda_i + k}\lambda_i^{1/2}\varphi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, \psi_i>}{\lambda_i + k} L^*\psi_i = L^* \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, \psi_i>}{\lambda_i + k}\psi_i .$$

Observaţie. Analog se arată imediat că

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, \psi_i>^2}{(\lambda_i + k)^2} < +\infty,$$

iar

$$\sum_{i=1}^{\infty} <g, \psi_i> \psi_i,$$

defineşte proiecţia lui g pe $\overline{H}^*$.

În consecinţă,

$$\bar{x} = L^* \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, \psi_i>}{\lambda_i + k}\psi_i .$$

Cazul 2 : $k = 0$

Cazul 2.1 : seria $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>^2}{\lambda_i^2} < +\infty$, adică este convergentă.

Va rezulta atunci implicaţia

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, \psi_i>^2}{\lambda_i^2} < +\infty \to \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>^2}{\lambda_i^3} < +\infty,$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultată din exprimarea funcției proprii ψ_i cu ajutorul lui φ_i. Implicația de mai sus conduce evident și la

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>}{\lambda_i^2} < +\infty.$$

În astfel de condiții, soluția ecuației Wiener-Hopf se scrie

$$\hat{x} = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>}{\lambda_i} \varphi_i, \quad \text{cu } x_0 \in \tilde{H}$$

sau

$$\hat{x} = x_0 + L^* \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, \psi_i>}{\lambda_i} \psi_i, \quad x_0 \in \tilde{H}.$$

Și în acest caz $\bar{x} = \hat{x}$, admițînd însă o infinitate de soluții după $x_0 \in \tilde{H}$. Rezultă

$$Q(\hat{x}) = - <h, \hat{x}> = - <g, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>}{\lambda_i} \varphi_i> =$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>^2}{\lambda_i} = - \|\bar{\xi}\|^2 = \alpha.$$

Concluzie importantă. Fie

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>}{\lambda_i} \varphi_i;$$

a tunci

$$\hat{x} = x_0 + \bar{\bar{x}}.$$

Se vede că

$$\min \|\hat{x}\| = \|\bar{\bar{x}}\|, \text{ corespunzînd lui } x_0 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar,

I. $Q(x) > Q(\bar{\bar{x}})$ (dacă $x \neq \bar{\bar{x}}$);

II. $Q(x) = Q(\bar{\bar{x}})$ (dacă $x = \hat{x}$), dar atunci $\|x\| \geqslant \|\bar{\bar{x}}\|$.

Exprimînd $Q(x)$ cu ajutorul operatorului L, se obţine

$$Q(x) = <Ax, x> -2<h, x> = <L^*, Lx, x> -2<L^*g, x> =$$

$$= <Lx, Lx> - 2<g, Lx> + \|g\|^2 - \|g\|^2 = \|Lx - g\|^2 - \|g\|^2.$$

Deci programul pătratic este echivalent cu

$$P(x) = \|Lx - g\|^2.$$

TEOREMA 9. *Dacă*

1) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>^2}{\lambda_i^2} < +\infty$;

2) $g \in \overline{H}^*$,

atunci

$$L\bar{\bar{x}} = g.$$

Demonstraţie. Evident se va putea scrie

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>}{\lambda_i} \varphi_i;$$

$$L\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{\infty} <g, \frac{L\varphi_i}{\lambda_i^{1/2}}> \frac{L\varphi_i}{\lambda_i^{1/2}} = \sum_{i=1}^{\infty} <g, \psi_i> \psi_i = g.$$

Observaţie. Dacă $g \in H^*$, atunci

$$L\bar{\bar{x}} = g - g_0 \quad g_0 \in \widetilde{H}^*.$$

Cazul 2.2 : nu este asigurată convergența seriei $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g, L\varphi_i>^2}{\lambda_i^2}$.

Se va aplica metoda iterativă a celei mai rapide pante (în $\overline{H}$), fiind suficient ca $x_1 \in \overline{H}$:

$$x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k z_k .$$

Dacă $x_k = L^* y_k$, atunci

$$x_{k+1} = L^* y_k + \varepsilon_k (L^* L_k - L^* g) = L^* (y_k + \varepsilon_k (\overbrace{LL^* y_k - g}^{v_k})) ;$$

există atunci $y_{k+1} \in H^*$, astfel încît $x_{k+1} = L^* y_{k+1}$, cu

$$y_{k+1} = y_k + \varepsilon_k (LL^* y_k - g) = y_k + \varepsilon_k v_k .$$

Aşadar, se va putea introduce metoda celei mai rapide pante în felul următor :

$$\varepsilon_k = - \frac{\| z_k \|^2}{<Az_k, z_k>} = - \frac{<L^* v_k, L^* v_k>}{<L^* LL^* v_k, L^* v_k>} = - \frac{<LL^* v_k, v_k>}{\| LL^* v_k \|^2} .$$

În concluzie,

$$y_{k+1} = y_k + \varepsilon_k v_k, \quad \varepsilon_k = - \frac{<LL^* v_k, v_k>}{\| LL^* v_k \|^2}, \quad v_k = LL^* y_k - g,$$

fiind suficient a se starta din $x_1 = L^* y_1$

Avantajul metodei celei mai rapide pante în spaţiul adjunct se manifestă atunci cînd din $H^* <$ dim H, aşa cum se va vedea mai tîrziu.

6.6. CONTROLABILITATE

Definiţie. Fie L un operator complet continuu de la H la H^*. Un punct $g \in H^*$ se spune controlabil dacă există $x \in H$, astfel ca

$$Lx = g.$$

Aşadar problema controlabilităţii se reduce la o operaţie de inversare a unui operator liniar.

Observaţie. Dacă $\overline{H} = H$, atunci şi $\overline{H}^* = H^*$ şi reciproc.

TEOREMA 10. *Dacă descompunerea* $\overline{H} \oplus \widetilde{H}$ *impusă de* L^*L *este de tipul* $\overline{H} = H$
şi

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{< g, L\varphi_i >^2}{\lambda_i^2} < +\infty,$$

atunci L *este controlabil.*

Demonstraţie. Rezultă că $g \in \overline{H}^* = H^*$, iar $x_0 = 0$, adică $\hat{x} = \overline{\overline{x}}$ ca soluţie unică a ecuaţiei $Ax = h$, iar

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{< g, L\varphi_i >}{\lambda_i} \varphi_i ;$$

în cazul în care

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{< g, L\varphi_i >^2}{\lambda_i^3} < +\infty,$$

atunci $\hat{x}$ admite şi reprezentarea

$$\hat{x} = L^* \sum_{i=1}^{\infty} \frac{< g, \psi_i >}{\lambda_i} \psi_i .$$

Caz particular important: $H^* = R^n$, adică:

$$L : H^* \to R^n.$$

Adjunctul se defineşte deci prin

$$< Lx, y >_E = < x, L^*y >, \quad x \in H, y \in R^n,$$

unde $< \quad >_E$ este produsul scalar în spaţiul euclidian R^n. În acest caz, spectrul lui L^*L şi LL^* este finit şi deci totdeauna

$$\overline{\overline{x}} = \sum_{i=1}^{p} \frac{< g, L\varphi_i >_E}{\lambda_i} \varphi_i,$$

aşadar

$$\hat{x} = x_0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{<g, L\varphi_i>_E}{\lambda_i} \varphi_i,$$

sau :

$$\hat{x} = x_0 + L^* \sum_{i=1}^{p} \frac{<g, \psi_i>_E}{\lambda_i} \psi_i, \ \psi_i \in R^n.$$

În acest caz, controlabilitatea se reduce la faptul că numărul valorilor proprii nenule ale matricei $LL^* : R^n \to R^n$ este egal cu n, adică matricea LL^* să fie strict pozitiv definită.

La nivelul lui R^n avem

$$\bar{\bar{y}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{<g, \psi_i>_E}{\lambda_i} \psi_i \in R^n$$

(adevărat evident şi dacă $n \neq p$).

Concluzie (rezultă imediat din cazul 2.1).

Soluţia de normă minimă a programului

$$Q(x) = <L^*Lx, x> - 2 <L^*g, x>$$

este

$$\bar{\bar{x}} = L^*\bar{\bar{y}}, \quad \bar{\bar{y}} = \sum_{i=1}^{p} \frac{<g, \psi_i>_E}{\lambda_i} \psi_i \in \bar{R}^n,$$

dar

$$Q(\bar{\bar{x}}) = <L^*LL^*\bar{\bar{y}}, L^*\bar{\bar{y}}> - 2 <L^*g, L^*\bar{\bar{y}}> = <(LL^*)^2\bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}>_E -$$

$$- 2 <LL^*g, \bar{\bar{y}}>_E.$$

În concluzie, $\bar{\bar{y}}$ este soluţia de normă minimă pentru programul pătratic euclidian ;

$$Q^*(y) = <(LL^*)^2 y, y>_E - 2 <LL^*g, y>_E = \|LL^*y - g\|_E^2 - \|g\|_E^2.$$

Aşadar, dacă $y \neq \bar{\bar{y}}$, pot apărea două cazuri:

1) $\|LL^*y - g\|_E > \|LL^*\bar{\bar{y}} - g\|_E$;

2) $\|LL^*y - g\|_E = \|LL^*\bar{\bar{y}} - g\|_E$ dar $\|y\|_E > \|\bar{\bar{y}}\|_E$,

deci $\bar{\bar{y}}$ este soluţia prin pseudoinversă a ecuaţiei (în R^n):

$$LL^*y = g,$$

fapt de altfel cunoscut într-un program pătratic euclidian în care matricea pătratică nu este strict pozitiv definită.

Evident, în cazul controlabilităţii, LL^* este strict pozitiv definită, adică inversabilă.

6.7. CRITERIUL GENERAL INTEGRAL PĂTRATIC

6.7.1. ENUNŢAREA PROBLEMEI

Se consideră conducerea liniară:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u;$$

$$A - n \times n - \text{continuă};$$

$$B - n \times r - \text{continuă}.$$

Evident,

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} W(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau,$$

unde

$$x_0(t) = X(t, t_0)\, x(t_0);$$

$$W(t, \tau) = X(t, \tau)\, B(\tau).$$

Se introduc

1) H_u^r — spaţiul comenzilor, $H_o^r = \{u \mid$continuă pe porţiuni$\}$;

2) H_x^n — spaţiul mărimilor de ieşire, cu organizarea de spaţiu Hilbert prin produsul scalar:

$$< u, v > = \int_0^T < u(t), v(t) >_E \mathrm{d}t;$$

şi

$$< u, u > = \| u \|^2 \quad u, v \in H_u^r,$$

analog şi pentru H_x^n.

Fie

$$L : H_u^r \to H_x^n,$$

definit prin egalitatea

$$(Lu)(t) = \int_0^T W(t, \tau)\, u(\tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in [0, T],$$

nucleul $W(t,\tau)$ bucurîndu-se de proprietatea

$$0 < \int_0^T \int_0^T \| W(t, \tau) \|_E^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau < + \infty.$$

Observaţie. În general se admite că $Lu = 0$ numai dacă $u = 0$.

TEOREMA 11. *$L : H_u^r \to H_x^n$ este un operator liniar continuu.*

Demonstraţie. Liniaritatea este evidentă. Să arătăm că este şi mărginită. Se poate scrie

$$(L\,u)\,(t) = \left[\int_0^T < w^i\,(t, \tau),\ u\,(\tau) >_E \mathrm{d}\tau \right],$$

unde

$$w^i\ (t, \tau) = (w_1^i\,(t, \tau), \ldots, w_r^i\,(t, \tau)) \in R^r.$$

Deci

$$(Lu)(t) = \begin{bmatrix} \vdots \\ <w^i(t,\ ), u> \\ \vdots \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} \vdots \\ \| w^i < t, > \| \, \| u \| \\ \vdots \end{bmatrix},$$

adică

$$\| (Lu)(t) \|_E^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \| w^i (t,\ ) \|^2 \, \|u\|^2 = \| u \|^2 \sum_{i=1}^{n} \| w^i (t,\ ) \|^2.$$

Se poate scrie

$$\|Lu\|^2 \leqslant \| u \|^2 \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \| w^i (t,) \|^2 \, dt = \| u \|^2 \int_0^T \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \| w^i (t, \tau) \|_E^2 \, dt \, d\tau =$$

$$= \| u \|^2 \int_0^T \int_0^T \| W (t, \tau) \|_E^2 \, dt \, d\tau = M^2 \|u\|^2,$$

adică există $M > 0$ astfel ca

$$\|Lu\| \leqslant M \, \|u\| ,$$

cu

$$M = \left(\int_0^T \int_0^T \| W (t, \tau) \|_E^2 \, dt \, d\tau \right)^{1/2},$$

deci teorema este complet demonstrată.

Concluzie. L este un operator complet continuu.

Indicele de performanţă al conducerii. Fie $\lambda = n \times n$ matrice a.p.t strict pozitiv definită;

$k = n \times r$ matrice a.p.t. strict pozitiv definită;

Se defineşte indicele de performanţă prin

$$J(u) = \int_0^T (\varepsilon^T(t) \, \lambda(t) \, \varepsilon(t) + u^T(t) \, k(t) \, u(t)) \, dt,$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$\varepsilon(t) = x(t) - x_d(t) = (L_u)(t) - g(t) \; ; g(t) = x_d(t) - x_0(t), t \in [o, T].$$

Problema de optimalitate constă în determinarea acelei comenzi u pentru care

$$J(\bar{u}) = \min \{J(u) \mid u \in Hu^r\}.$$

6.7.2. EXPRIMAREA INDICELUI DE PERFORMANȚĂ

Să evaluăm întîi adjunctul lui L:

$$< x, Lu > = \int_0^T x^T(t)(Lu)(t)\,dt = \int_0^T \int_0^T x^T(t) W(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau\, dt =$$

$$= \int_0^T u^T(\tau)\,d\tau \int_0^T w^T(t, \tau)\, x(t)\,dt = < u, L^* x >,$$

adică

$$(L^* x)(t) = \int_0^T W^T(\tau, t)\, x(\tau)\,d\tau.$$

Vom introduce:

1) fie μ — $n \times n$ strict pozitiv, definită aproape peste tot, şi operatorul $L: H_u^r \to H_x^n$. Atunci prin μL se înţelege $((\mu L)\, u)(t) = = \mu(t)(Lu)(t) = \mu(t) \int_0^T W(t, \tau)\, u(\tau)\,d\tau$;

2) $P: H_x^n \to H_u^r$. Atunci prin $P\mu$ se înţelege $((P\mu)\, x)(t) = (P(\mu x))(t) = \int_0^T \pi(t, \tau)\, \mu(\tau)\, x(\tau)\,d\tau.$

Propoziţia 4. În condiţiile de mai sus avem

$$(\mu L)^* = L^* \mu\,.$$

Demonstrație :

$$< x, \mu L > = \int_0^T x^T(t)\, \mu(t)\, \mathrm{d}t \int_0^T W(t, \tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^T \int_0^T x^T(t)\, \mu(t)\, W(t, \tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau =$$

$$\int_0^T u^T(\tau)\, \mathrm{d}\tau \int_0^T W^T(t, \tau)\, \mu(t)\, x(t)\, \mathrm{d}t = < u, L^* \mu x > .$$

Concluzie. Fie λ definită cu ocazia indicelui de performanță. Se introduce atunci

$$\hat{L} = \sqrt{\lambda}\, L$$

și, evident,

$$\hat{L}^* = L^* \sqrt{\lambda} .$$

Ambii operatori sînt complet continui. Atunci , evident,

$$(\sqrt{\lambda}\, L)^* = L^* \sqrt{\lambda} .$$

Trecem acum la exprimarea efectivă a indicelui de performanță. Evident expresia integrală a acestuia devine

$$J(u) = < \varepsilon, \lambda \varepsilon > + < u, ku > =$$

$$= < Lu - g, \lambda Lu - \lambda g > + < u, ku > = < u, L^* \lambda Lu > -$$

$$- 2 < g, \lambda Lu > + < u, ku > + < g, \lambda g > = < u, L^* \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda} Lu > +$$

$$+ < u, ku > - 2 < L^* \sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda}\, g, u > + < g, \lambda g > = < u, \hat{L}^* \hat{L} u > +$$

$$+ < u, ku > - 2 < \hat{L}^* \hat{g}, u > + < g, \lambda g > ,$$

unde $\hat{g} = \sqrt{\lambda}\, g$, sau

$$J(u) = < u, (\hat{L}^* \hat{L} + k)\, u > - 2 < \hat{L}^* \hat{L}, u > + < g, \lambda g >.$$

Problema de optim este deci echivalentă cu programul pătratic

$$Q(u) = < u (\hat{L}^* \hat{L} + k)\, u > - 2 < \hat{L}^* \hat{g}, u >.$$

Punînd

$$R = \hat{L}^* \hat{L} + k \text{ strict pozitiv, definit și}$$

$$h = \hat{L}^* \hat{g},$$

se poate scrie

$$Q(u) = < Ru, u > - 2 < h, u >.$$

Se vede imediat că nucleul lui $\hat{L}^* \hat{L}$ este

$$K(T, \mu) = \int_0^T W^T(t, T)\, \lambda(t)\, W(t, \mu)\, dt,$$

acesta fiind evident simetric:

$$(\hat{L}^* \hat{L} u)(t) = \int_0^T k(t, \mu)\, u(\mu)\, d\mu.$$

6.7.3. REZOLVAREA PROBLEMEI

A. Metoda directă:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{< \hat{g}, \hat{L}\, \varphi_i >}{\lambda_i + k}\, \varphi_i \text{ unic}$$

dacă k se reduce la $k > 0$ în R^1.

B. Metoda iterativă: metoda celei mai rapide pante. Atunci

$$u_{k+1} = u_k + \varepsilon_k z_k;$$

$$\varepsilon_k = -\frac{\|z_k\|}{< Rz_k, z_k >}, \quad z_k = Ru_k - h,$$

cu convergenţă tare.

6.7.4. OPTIMIZAREA VALORII FINALE

Această problemă se exprimă cu ajutorul indicelui de performanţă prin

$$J(u) = \|x(T) - x_d(T)\|_E^2 = \min,$$

unde T este timpul final al conducerii, fiind impus.
Introducînd

$$L : H_u^r \to R^n$$

prin

$$R^n \ni Lu = \int_0^T W(T, \tau)\, u(\tau)\, d\tau,$$

rezultă imediat

$$L^* = W^T(T, t),$$

deci

$$x(T) = Lu - g$$

şi

$$J(u) = < Lu - g, Lu - g > = < L^* Lu, u > - 2 < L^* g, u > + \|g\|^2,$$

adică

$$Q(u) = < L^* Lu, u > - 2 < L^* g, u >.$$

Soluţia problemei va fi

$$\bar{u} = u_0 + L^* \bar{\bar{x}} = u_0 + W^T(T, t)\, \bar{\bar{x}},$$

$$u_0 \in \widetilde{H}_u^r,$$

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{p} \frac{< g, \psi_i >}{\lambda_i} \psi_i \,.$$

$\bar{\bar{x}}$ se poate exprima şi ca soluţie cu ajutorul pseudoinversei lui

$$LL^* = K(T) = \int_0^T W(T, t) W^T(T, t)\, dt, \text{ adică } \bar{\bar{x}} = K(T)^{\#} g,$$

iar comanda de normă minimă este

$$\bar{\bar{u}} = W^T(T, t)\, \bar{\bar{x}}.$$

Sistemul va fi complet controlabil dacă $K(T)$ este strict pozitiv definită.

Într-adevăr, atunci

$$L\bar{\bar{u}} = g = x_d(T) - x_0(T),$$

$$x_0(T) + L\bar{\bar{u}} = x(T) = x_d(T).$$

Observaţie : Pe baza considerentelor de mai sus, folosind teorema Cayley-Hamilton, se obţine teorema lui Kalman asupra controlabilităţii sistemelor autonome :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

exprimată prin aceea că condiţia necesară şi suficientă ca sistemul să fie complet controlabil este ca rangul matricei

$$\{B, AB, \ldots, A^{n-1} B\}$$

să fie egal cu n.

Scanned with OKEN Scanner

Observație importantă în cazul sistemelor autonome. Împărțind intervalul $[0, T]$ într-un număr de intervale de lungime egală T_1, se obține

$$K(k T_1) = \int_{(k-1)T_1}^{kT_1} W(kT_1, t)\, W^T(kT_1, t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{(k-1)T_1}^{kT_1} W(kT_1 - t)\, W^T(kT_1 - t)\, \mathrm{d}t,$$

$$kT_1 - t = \tau,$$

$$K(kT_1) = \int_0^{T_1} W(\tau)\, W^T(\tau)\mathrm{d}\tau = K(T_1).$$

Concluzie. În loc de a considera optimizarea

$$\|x - x_d\| \equiv min,$$

se poate considera optimizarea mai particulară, furnizînd de fapt o conducere suboptimală:

$$\| x(kT_1) - x_d(kT_1) \|_E \equiv \min, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

6.7.5. APLICAȚII PRIVIND IDENTIFICAREA OBIECTELOR LINIARE AUTONOME

Aceasta constă în determinarea matricei de pondere a sistemului.

Principiul identificării:

a) se memorează intrarea $u\,|_{[0,T]}$;

b) se memorează ieșirea alterată de un zgomot, considerată de forma

$$y(t) = x(t) + u(t);$$

c) se consideră drept criteriu de selecție

$$\|y - x\|^2 \equiv \min,$$

adică

$$\int_0^T (y(t) - x(t))^T (y(t) - x(t))\, dt \equiv \min.$$

Notînd cu T_s timpul de stabilire, rezultă

$$x(t) = \int_0^{T_s} w(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \left[\int_0^{T_s} w^{iT}(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau\right] =$$

$$= \left[\int_0^{T_s} u^T(t-\tau)\, w^i(\tau)\, d\tau\right], t \in [0, T].$$

Problema se reduce deci la următoarele: să se găsească $w^i \in H_\mu^r$ $i = 1, \ldots, n$ astfel încît:

$$\int_0^T \left[\int_0^{T_s} u^T(t-\tau)\, w^i(\tau)\, d\tau - y^i(t)\right]^2 dt$$

să fie minim pentru $i = 1, \ldots, n$.
Problema echivalentă este deci:

Dîndu-se

1) $u \in H_u^r$,

2) $y \in H_x^1$,

să se găsească

$$\omega \in H_u^r, t \in [0, T_s],$$

astfel ca

$$\int_0^T \left[\int_0^{T_s} u^T(t-\tau)\, \omega(\tau)\, d\tau - y(t)\right]^2 dt \equiv \min.$$

Formalizarea problemei identificării

Se dă

1) $L : H_u^r \to H_x^1$,

prin

$$(L\omega)\ (t) = \int_0^{T_s} u^T(t-\tau)\ \omega(\tau)\ d\tau;$$

2) norma în H_x^1, notată $\|\ \ \|_T \equiv \int_0^T x^2(t)\ dt$

și

1') adjunctul lui L fiind

$$< x, L\omega >_T = \int_0^T x(t)\ dt \int_0^{T_s} u^T(t-\tau)\ \omega(\tau)\ d\tau =$$

$$= \int_0^T \int_0^{T_s} \omega^T(\tau)\ u(t-\tau)\ x(t)\ dt\ d\tau =$$

$$= \int_0^{T_s} \omega^T(\tau)\ d\tau \int_0^T u(t-\tau)\ x(t)\ dt = < \omega, L^*x >_{T_s}, \text{ unde};$$

2') norma în H_u^r, notată $\|\ \ \|_{T_s} = \int_0^{T_s} \omega^T(t)\ \omega(t)\ dt$,

deci

$$(L^*x)\ (\tau) = \int_0^T u(t-\tau)\ x(t)\ dt;$$

3) $y \in H_x^1$.

Se cere să se determine $\bar{\omega} \in H_u^r$ astfel ca

$$\|L\bar{\omega} - y\|_T = \min\ \{\|L\omega - y\|_T \mid \omega \in H_u^r\},$$

unde suportul lui ω este $[0, T_s]$.

Problema se exprimă prin programul pătratic

$$Q(\omega) = < L^*L\ \omega,\ \omega\ > - 2 < L^*y,\ \omega\ >,\ \omega \in H_u^r,\ \text{cu suportul } [0,\ T_s].$$

Se va aplica metoda celei mai rapide pante, însă în H_x^1, fiind avantajoasă datorită faptului că H_x^1 are dimensiunea unitară.

Vom avea atunci

$$x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k v_k$$

$$\varepsilon_k = - \frac{< LL^* v_k,\ v_k >}{\| LL^* v_k \|^2},\ v_k = LL^*\ x_k - y,$$

ceea ce permite aplicarea imediată a tehnicii de calcul, în speță folosirea unui calculator numeric.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 7 PROBLEMA SINTEZEI OPTIMALE LOCALE

În cele ce urmează ne vom ocupa de integrarea ecuației Hamilton-Jacobi în jurul unei traiectorii optimale cunoscute. În consecință, problema revine la stabilirea funcției k (vezi cap. 3), care descrie sinteza optimală nu în întreg domeniul G, ci numai local față de traiectoria optimală stabilită în prealabil.

Vom considera valabile condițiile teoremei de necesitate de la capitolul 3. Vom presupune în plus că :

1) S este dezvoltabilă în serie în jurul traiectoriei optimale pentru orice t în intervalul de conducere ;

2) $\hat{f}$ este dublu analitică în raport cu u ;

3) restricțiile sînt de tip paralelipipedic :

$$U = [a^1, b^1] \times \ldots \times [a^r, b^r] ;$$

4) intervalul de conducere este impus.

Sinteza optimală locală își propune să rezolve ecuația lui Bellman în maniera Hamilton-Jacobi, considerînd o aproximație polinomială a funcției S, adică punerea în evidență pînă la un anumit rang a termenilor care intervin în dezvoltarea Taylor a funcției $S(x, t)$ (în raport cu x), unde se reamintește că în acest caz

$$S_t(t, x) + H^0(S_x(t, x), t, x) = 0 \quad \text{cu} \quad S(t_1, x(t_1)) = 0 .$$

7.1. HAMILTONIANUL TRUNCHIAT

Dezvoltînd în serie în jurul traiectoriei optimale, se obține

$$S(t, x) = S(t, \bar{x}(t)) + S_{x^i}(t, \bar{x}(t))(x^i - \bar{x}^i(t)) \text{ *) } + \ldots +$$

*) Se va folosi notația tensorială, astfel că semnul Σ nu va mai fi figurat.

$$+\frac{1}{q!}S_{x^ix^j\dots x^k}(t,\bar{x}(t))\underbrace{(x^i-\bar{x}^i(t))(x^j-\bar{x}^j(t))\dots(x^k-\bar{x}^k(t))}_{q}+$$

$$+R_{ij\dots kl}\underbrace{(x^i-\bar{x}^i(t))\dots(x^l-\bar{x}^l(t))}_{q+1}.$$

Punînd

$$S(t,\bar{x}(t))=\bar{p}_0(t),$$

$$S_{x^i}(t,\bar{x}(t))=\bar{p}_i(t),$$

. . . . . .

$$\frac{1}{q!}S_{x^ix^j\dots x^k}(t,\bar{x}(t))=\bar{p}_{ij\dots k}(t).$$

şi introducînd q — aproximaţia polinomială a lui $S(t,x)$ prin

$$S^q(t,x)=\bar{p}_0(t)+\bar{p}_i(t)(x^i-\bar{x}^i(t))+\dots+$$
$$+\bar{p}_{ij\dots k}(t)(x^i-\bar{x}^i(t))(x^j-\bar{x}^j(t))\dots(x^k-\bar{x}^k(t)),$$

se obţine în definitiv

$$S(t,x)=S^q(t,x)+R_{ij\dots kl}\underbrace{(x^i-\bar{x}^i(t))\dots(x^l-\bar{x}^l(t))}_{q+1}.$$

În acest caz termenii care intervin în ecuaţia lui Bellman se scriu

$$S_t(t,x)=S_t^q(t,x)-(q+1)R_{ij\dots kl}\dot{\bar{x}}^i(t)\underbrace{(x^j-\bar{x}^j(t))\dots(x^l-\bar{x}^l(t))}_{q}+$$

$$+R_{tij\dots kl}\underbrace{(x^i-\bar{x}^i(t))\dots(x^l-\bar{x}^l(t))}_{q+1}$$

şi

$$S_{x^i}(t,x)=S_{x^i}^q(t,x)+(q+1)R_{ij\dots kl}\underbrace{(x^i-\bar{x}^j(t))\dots(x^l-\bar{x}^l(t))}_{q}+$$

$$+R_{x^ii'j\dots kl}\underbrace{(x^{i'}-\bar{x}^{i'})\dots(x^l-\bar{x}^l(t))}_{q+1},$$

unde

$$S_t^q(t, x) = \dot{\bar{p}}_0(t) + \dot{\bar{p}}_i(t)(x^i - \bar{x}^i(t)) - \bar{p}_i(t)\dot{\bar{x}}^i(t) +$$
$$+ \dot{\bar{p}}_{ij}(t)(x^i - \bar{x}^i(t))(x^j - \bar{x}^j(t)) - 2\bar{p}_{ij}(t)\dot{\bar{x}}^i(t)(x^j - \bar{x}^j(t)) + \ldots +$$
$$+ \dot{\bar{p}}_{ij\ldots k}(t)(x^i - \bar{x}^i(t)(x^j - \bar{x}^j(t)) \ldots (x^k - \bar{x}^k(t)) -$$
$$- q\,\bar{p}_{ij\ldots k}(t)\dot{\bar{x}}^i(t)(x^j - \bar{x}^j(t)) \ldots (x^k - \bar{x}^k(t)) = \dot{\bar{p}}_0(t) -$$
$$- \bar{p}_i(t)\dot{\bar{x}}^i(t) + (\dot{\bar{p}}_i(t) - 2\bar{p}_{ji}(t)\dot{\bar{x}}^j(t))(x^i - \bar{x}^i(t)) + \ldots +$$
$$+ \dot{\bar{p}}_{ij\ldots k}(t)(x^i - \bar{x}^i(t))(x^j - \bar{x}^j(t)) \ldots (x^k - \bar{x}^k(t)),$$

iar

$$S_{x^i}^q(t, x) = \bar{p}_i(t) + \ldots + q\,\bar{p}_{ij\ldots k}(t)(x^j - \bar{x}^j(t)) \ldots (x^k - \bar{x}^k(t)).$$

Să considerăm acum funcţia H care generează hamiltonianul

$$H(S_x, t, x, u) = f^0(t, x, u) + S_{x^i} f^i(t, x, u),$$

minimizată de $\bar{u} \in U$, obţinîndu-se deci

$$H^0(S_x, t, x) = H(S_x, t, x, \bar{u}).$$

Introducînd acum în funcţia H expresia calculată a lui $S_{x^i}(t, x)$, se obţine

$$H(S_x, t, x, u) = f^0(t, x, u) + S_{x^i}^q f^i(t, x, u) +$$
$$+ (q+1)R_{ij\ldots kl}\underbrace{(x^j - \bar{x}^j(t)) \ldots (x^l - \bar{x}^l(t))}_{q} f^i(t, x, u) +$$
$$+ R_{x^i i' j\ldots kl}\underbrace{(x^{i'} - \bar{x}^{i'}(t)) \ldots (x^l - \bar{x}^l(t))}_{q+1} f^i(t, x, u).$$

Introducem funcţia

$$H_q(t, x, u) = f^0(t, x, u) + S_{x^i}^q f^i(t, x, u).$$

Structura analitică a lui $S_{x^i}^q$ fiind polinomială, H_q se poate scrie exclusiv în funcţie de variabilele t, x, u, iar $\bar{p}_0(t), \ldots, \bar{p}_{ij\ldots k}(t)$ fiind necunoscute.

Fie $\overline{u}_q$ vectorul care minimizează în U, $H_q(t, x, u)$, astfel că:

$$H_q^0(t, x) = H_q(t, x, \overline{u}_q).$$

$H_q^0(t, x)$ se numeşte hamiltonianul q — trunchiat al problemei. Aşadar, se va putea scrie

$$H(S_x, t, x, u) = H_q(t, x, u) + (q+1) R_{ij\ldots kl}(x^j - \overline{x}^j(t)) \ldots$$
$$\ldots (x^l - \overline{x}^l(t)) f^i(t, x, u) + \{q+1\},$$

unde prin $\{q+1\}$ s-au pus în evidenţă termenii polinomiali de rang superior a lui q.

7.2. ECUAŢIA LUI HAMILTON-JACOBI TRUNCHIATĂ

Dezvoltînd $f^i(t, x, u)$ în jurul lui $x(t)$ şi admiţînd reprezentarea

$$\overline{u}(t) = k(t, \overline{x}(t)),$$

fără a fi nevoie să se cunoască structura funcţiei în t şi x, şi ţinînd cont de asemenea de

$$\dot{\overline{x}}^i(t) = f^i(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)),$$

rezultă

$$H(S_x, t, x, u) = H_q(t, x, u) +$$
$$+ (q+1) R_{ij\ldots kl} \dot{\overline{x}}^i(t) (x^j - \overline{x}^j(t)) \ldots (x^l - \overline{x}^l(t)) + \{q+1\}.$$

Să stabilim acum dependenţa dintre valorile minimizate ale funcţiilor H şi H_q, adică dependenţa dintre $H^0(S_x, t, x)$ şi $H_q^0(t, x)$. Din

$$H_q(t, x, \overline{u}) = H_q(t, x, \overline{u}_q) + [\overline{u} - \overline{u}_q]^T [\nabla_u H_q(t, x, \hat{u})], \hat{u} \in [\overline{u}_q, \overline{u}]$$

rezultă

$$H^0(S_x, t, x) = H_q^0(t, x) + [\overline{u} - \overline{u}_q]^T [\nabla_u H_q(t, x, \hat{u})] +$$
$$+ (q+1) R_{ij\ldots kl} \dot{\overline{x}}^i(t) (x^j - \overline{x}^j(t)) \ldots (x^l - \overline{x}^l(t)) + \{q+1\}.$$

De asemenea

$$[\nabla_u H(S_x, t, x, u)] = [\nabla_u H_q(t, x, u)] + [\nabla_u \{q+1\}],$$

iar

$$[\nabla_u H(S_x, t, x, \bar{u})] = [\nabla_u H_q(t, x, \bar{u}_q)] + \\ + [\nabla_{uu} H_q(t, x, u')][\bar{u} - \bar{u}_q] + [\nabla_u \{q+1\}].$$

Pot apărea următoarele cazuri cu privire la localizarea lui $\bar{u}(t)$.

Cazul 1: $\bar{u}(t) \in \mathring{U}$. Există puncte suficient de apropiate, controlabilitatea în jurul traiectoriei optimale fiind asigurată de proprietăţile conului lui Pontreaghin, de traiectoria optimală, astfel încît $\bar{u}$ şi $\bar{u}_q \in \mathring{U}$ şi deci

$$[\nabla_u H(S_x, t, x, \bar{u})] = [\nabla_u H_q(t, x, \bar{u}_q)] = 0,$$

iar

$$[\nabla_{uu} H_q(t, x, u')]$$

pozitiv definită, ceea ce rezultă din proprietatea de continuitatea condiţiei lui Legendre, adică existenţa lui

$$[\nabla_{uu} H_q(t, x, u)]^{-1}.$$

Rezultă deci

$$[\nabla_{uu} H_q(t, x, u')][\bar{u} - \bar{u}_q] + [\nabla_u \{q+1\}] = 0$$

sau

$$[\bar{u} - \bar{u}_q] = [\nabla_{uu} H_q(t, x, u')]^{-1} [\nabla_u \{q+1\}] \Rightarrow [\{q+1\}].$$

Cazul 2: $\bar{u}(t) \in F_r(U)$. Se va considera pentru a nu complica demonstraţia că $\bar{u}(t)$ este pe o faţă a paralelipipedului, de exemplu

$$\bar{u}^1(t) = b^1, \bar{u}^2(t) \in (a^2, b^2), \ldots, \bar{u}^r(t) \in (a^r, b^r).$$

Este evident că în $\bar{u}^2(t), \ldots, \bar{u}^r(t)$ are loc o anulare a derivatelor parţiale împreună cu existenţa condiţiei lui Legendre. Deci în raport cu aceste componente, calculul efectuîndu-se pentru componentele $u^2, \ldots, u^r$, se pot aplica întocmai rezultatele de la cazul 1 şi, în consecinţă,

$$\bar{u}^i - \bar{u}^i_q = \{q+1\}, \quad 2 \leqslant i \leqslant r.$$

În ceea ce priveşte $\bar{u}^1(t)$ se poate ca

a) $H_{u^1}(\bar{S}_x, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \neq 0$;

înseamnă că prin continuitate în jurul traiectoriei optimale avem

$$H_{u^1}(S_x, t, x, \bar{u}) \neq 0 \to H_{qu^1}(t, x, \bar{u}_q) \neq 0, \text{ adică } b^1 = \bar{u}^1 = \bar{u}^1_q$$

$$\text{sau } \bar{u}^1 - \bar{u}^1_q = 0.$$

Rezultă în general $[\bar{u} - \bar{u}_q] = \{q + 1\}$.

b) $H_{u^1}(\bar{S}_x, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$;

în jurul traiectoriei optimale pot acum apărea următoarele trei subcazuri:

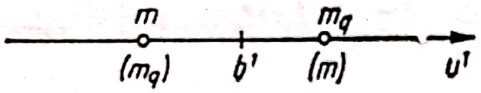
b_1) $H_{u^1}(S_x, t, x, \bar{u}) \neq 0$, $H_{qu^1}(t, x, \bar{u}_q) \neq 0$,

cazul acesta fiind tratat;

b_2) $H_{u^1}(S_x, t, x, \bar{u}) = 0$, $H_{qu^1}(t, x, \bar{u}_q) = 0$;

b_3) $H_{u^1}(S_x, t, x, \bar{u}) = 0$, $H_{qu^1}(t, x, \bar{u}_q) \neq 0$.

În cazurile b_2), b_3), $H(\bar{S}_x, t, \bar{x}(t), u)$ are un minim analitic în $\bar{u}(t)$ şi deci pentru valori apropiate de $x(t)$ minimul analitic se păstrează *), părăsind însă restricţia (fig. 22).



m - minimul lui H
m_q - minimul lui H_q

Fig. 22

Cum însă lungimea segmentului mm_q (vezi cazul 1) este de tipul

$$|m - m_q| = |\{q + 1\}|,$$

cu atît mai mult

$$|m - b^1| \text{ sau } |m_q - b^1| = |\{q + 1\}|.$$

Aşadar, în toate cazurile analizate

$$[\bar{u} - \bar{u}_q] = \{q + 1\}.$$

În concluzie,

$$H^0(S_x, t, x) = H^0_q(t, x) + (q + 1) R_{ij \ldots kl} \dot{\bar{x}}^i(t) (x^j - \bar{x}^j(t)) \ldots$$
$$\ldots (x^l - \bar{x}^l(t)) + \{q + 1\}.$$

*) Rezultă din forma pătratică afectată extremumului.

Rezultă acum

$$H_q^0(t, x) = H_q^0(t, \bar{x}(t)) + H_q^0 x^i(t, \bar{x}(t))(x^i - \bar{x}^i(t)) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{q!} H^0_{qx^i x^j \ldots x^k}(t, \bar{x}(t)) \underbrace{(x^i - \bar{x}^i(t)) \ldots (x^k - \bar{x}^k(t))}_{q} + \{q+1\} \equiv$$

$$\equiv \bar{h}_0(t) + \bar{h}_i(t)(x^i - \bar{x}^i(t)) + \ldots + \bar{h}_{ij\ldots k}(t)(x^i - \bar{x}^i(t)) \ldots$$

$$\ldots (x^k - \bar{x}^k(t)) + \{q+1\}.$$

Observație. $\bar{h}_0(t), \ldots, \bar{h}_{ij\ldots k}(t)$ se pot determina ca structură în funcție de $\bar{p}_0(t), \ldots, \bar{p}_{ij\ldots k}(t)$ de la caz la caz. Se notează cu

$$H_q^{+0}(t, x) = \bar{h}_0(t) + \ldots + \bar{h}_{ij\ldots k}(t)(x^i - \bar{x}^i(t)) \ldots (x^k - \bar{x}^k(t))$$

definind q — aproximația polinomială a hamiltonianului trunchiat, adică

$$H_q^0(t, x) = H_q^{+0}(t, x) + \{q+1\}.$$

Înlocuind expresia obținută în ecuația Hamilton — Jacobi, rezultă

$$S_t^q(t, x) + H_q^{+0}(t, x) + \{q+1\} = 0,$$

în care primii doi termeni sînt polinoame de gradul q în x. Atunci q — aproximația polinomială a ecuației inițiale va fi

$$S_t^q(t, x) + H_q^{+0}(t, x) = 0,$$

numindu-se ecuația Hamilton-Jacobi trunchiată.

Această ecuație q — aproximează polinomial conducerea optimală în jurul traiectoriei optimale.

7.3. SISTEMUL CANONIC TRUNCHIAT

Ecuația stabilită mai sus este interesantă prin sistemul de ecuații diferențiale care-l generează : înlocuind, rezultă

$$\dot{\bar{p}}_0(t) - \bar{p}_i(t)\dot{\bar{x}}^i(t) + h_0(t) + (\dot{\bar{p}}_i(t) - 2\bar{p}_{ij}(t)\dot{\bar{x}}^j(t) + \bar{h}_i(t))(x^i -$$

$$- \bar{x}^i(t)) + \ldots + (\dot{\bar{p}}_{ij\ldots k}(t) + \bar{h}_{ij\ldots k}(t))(x^i - \bar{x}^i(t)) \ldots (x^k - \bar{x}^k(t)) = 0,$$

relații valabile pentru orice x vecin cu $\bar{x}(t)$.

Scanned with OKEN Scanner

Va rezulta în consecinţă

$$\dot{\overline{p}}_0(t) - \overline{p}_i(t)\,\dot{\overline{x}}^i(t) + \overline{h}_0(t) = 0\,,$$

$$\dot{\overline{p}}_i(t) - 2\,\overline{p}_{ij}(t)\,\dot{\overline{x}}^j(t) + \overline{h}_i(t) = 0\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{\overline{p}}_{ij\dots k}(t) + \overline{h}_{ij\dots k}(t) = 0\,.$$

Din

$$\overline{h}_0(t) - \overline{p}_i(t)\,\dot{\overline{x}}^i(t) = f^0(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))$$

rezultă sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\dot{\overline{p}}_0(t) = -f^0(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\,,$$

$$\dot{\overline{p}}_i(t) = 2\,\overline{p}_{ij}(t)\,\dot{\overline{x}}^j(t) - \overline{h}_i(t)\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{\overline{p}}_{ij\dots k}(t) = -\overline{h}_{ij\dots k}(t)\,,$$

cu condiţiile de transversalitate evidente :

$$\overline{p}_0(t_1) = \dots = \overline{p}_{ij\dots k}(t_1) = 0\,.$$

Aceste ecuaţii diferenţiale rezolvă problema sintezei optimale locale.

7.4. CONSIDERAŢII DIN PUNCTUL DE VEDERE AL CALCULULUI

Este comod ca aproximaţia polinomială a funcţiei S să fie scrisă

$$S^q(t, x) = \overline{s}_0(t) + \overline{s}_i(t)\,x^i + \dots + \overline{s}_{ij\dots k}(t)\,x^i\,x^j\dots x^k$$

şi în mod corespunzător expresia q — aproximaţiei polinomiale a hamiltonianului trunchiat :

$$H_q^{+0}(t, x) = \overline{g}_0(t) + \overline{g}_i(t)\,x^i + \dots + \overline{g}_{ij\dots k}(t)\,x^i\,x^j\dots x^k\,.$$

Pentru clarificarea celor expuse vom analiza mai în detaliu cazul aproximaţiei polinomiale de ordinul doi. Vom avea

$$\dot{\bar{p}}_0(t) = -f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}t)),$$

$$\dot{\bar{p}}_i(t) = 2\bar{p}_{ij}(t)\dot{\bar{x}}^j(t) - h_i(t),$$

$$\dot{\bar{p}}_{ij}(t) = -\bar{h}_{ij}(t),$$

$$\bar{p}_0(t_1) = \bar{p}_i(t_1) = \bar{p}_{ij}(t_1) = 0,$$

iar

$$S^2(t, x) = \bar{p}_0(t) + \bar{p}_i(t)\,(x^j - \bar{x}^i(t)) + \bar{p}_{ij}(t)(x^i - \bar{x}^i(t))\,(x^j - x^j(t)),$$

hamiltonianul trunchiat fiind

$$H_2^0(t, x) = f^0(t, x, \bar{u}_2) + f^i(t, x, \bar{u}_2)\,(\bar{p}_i(t) + 2\bar{p}_{ij}(t)\,(x^j - \bar{x}^j(t))).$$

În ipoteza absenţei restricţiilor avem

$$H_{2u}(t, x, \bar{u}_2) = 0 = f^0_{uk}(t, x, \bar{u}_2) + f^i_{uk}(t, x, \bar{u}_2)\,(\bar{p}_i(t) +$$

$$+ 2\,\bar{p}_{ij}(t)\,(x^j - \bar{x}^j(t))) = 0,$$

împreună cu condiţia lui Legendre.

Să calculăm acum

$$\bar{h}_i(t) \text{ şi } \bar{h}_{ij}(t):$$

$$H^0_{2x\alpha}(t, x) = f^0_{x\alpha}(t, x, \bar{u}_2) + f^i_{x\alpha}(t, x, \bar{u}_2)\,(\bar{p}_i(t) + 2\bar{p}_{ij}(t)\,(x^j - x^j)) +$$

$$+ 2f^i(t, x, \bar{u}_2)\,\bar{p}_{i\alpha}(t) + \underbrace{[\nabla_{\bar{u}_2} H_2]^T [u_{2x\alpha}]}_{\text{nul}},$$

de unde

$$\bar{h}_\alpha(t) = f^0_{x\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + f^i_{x\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,p_i(t) + 2f^i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,\bar{p}_{i\alpha}(t)$$

$$H^0_{2x\alpha x\beta}(t, x) = f^0_{x\alpha x\beta}(t, x, \bar{u}_2) + f^i_{x\alpha x\beta}(t, x, \bar{u}_2)\,(\bar{p}_i(t) + 2\bar{p}_{ij}(t)\,(x^j - \bar{x}^j(t))) +$$

$$+ 2f^i_{x\beta}(t, x, \bar{u}_2)\,\bar{p}_{i\alpha}(t) + 2f^i_{x\alpha}(t, x, \bar{u}_2)\,p_{i\beta}(t) + R_{\alpha\nu}(t, x)\,\bar{u}^\nu_{2x\beta},$$

unde

$$R_{\alpha\nu}(t, x) = f^0_{x^\alpha u^\nu}(t, x, \overline{u}_2) + f^i_{x^\alpha u^\nu}(t, x, \overline{u}_2)\,(\overline{p}_i(t) + 2\overline{p}_{ij}(t)\,(x^j - \overline{x}^j(t))) +$$

$$+ 2f^i_{u^\nu}(t, x, \overline{u}_2)\,\overline{p}_{i\alpha}(t).$$

Aşadar,

$$H^0_{2x^\alpha x^\beta}(t, \overline{x}(t)) = f^0_{x^\alpha x^\beta}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) + f^i_{x^\alpha x^\beta}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\,\overline{p}_i(t) +$$

$$+ 2f^i_{x^\beta}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\,\overline{p}_{i\alpha}(t) + 2f^i_{x^\alpha}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\,\overline{p}_{i\beta}(t) +$$

$$+ R_{\alpha\nu}(t, \overline{x}(t))\overline{u}^\nu_{2x^\beta}(t) = 2\overline{h}_{\alpha\beta}(t)$$

şi

$$R_{\alpha\nu}(t, \overline{x}(t)) = f^0_{x^\alpha u^\nu}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) + f^i_{x^\alpha u^\nu}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\,\overline{p}_i(t) +$$

$$+ 2f^i_{u^\nu}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))\,\overline{p}_{i\alpha}(t).$$

Observaţie. Derivatele $\overline{u}^\nu_{2x^\beta}$ se obţin derivînd condiţia de anulare a derivatelor parţiale :

$$f^0_{u^k x^\beta}(t, x, \overline{u}_2) + f^i_{u^k x^\beta}(t, x, \overline{u}_2)\,(\overline{p}_i(t) + 2\dot{\overline{p}}_{ij}(t)\,(x^j - \overline{x}^j(t))) +$$

$$+ 2f^i_{u^k}(t, x, \overline{u}_2)\,\overline{p}_{i\beta}(t) + (f^0_{u^k u^\nu}(t, x, \overline{u}_2) +$$

$$+ f^i_{u^k u^\nu}(t, x, \overline{u}_2)\,(\overline{p}_i(t) + 2\overline{p}_{ij}(t)\,(x^j - \overline{x}^j(t))))\,\overline{u}^\nu_{2x^\beta} = 0.$$

Sau, introducînd

$$T_{k\nu}(t, x) = f^0_{u^k u^\nu}(t, x, \overline{u}_2) + f^i_{u^k u^\nu}(t, x, \overline{u}_2)\,(\overline{p}_i(t) + 2\overline{p}_{ij}(t)\,(x^j - \overline{x}^j(t))),$$

rezultă

$$T_{k\nu}(t, x)\,\overline{u}^\nu_{2x^\beta} = -\,R_{k\beta}(t, x),$$

matricea $[T_{k\nu}]$ fiind pozitiv definită din condiţia lui Legendre şi deci inversabilă.

Se precizează că

$$T_{k\nu}(t, \bar{x}(t)) = f^0_{u^k u^\nu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + f^i_{u^k u^\nu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, \bar{p}_i(t).$$

În aceste condiţii, sistemul canonic trunchiat devine

$$\dot{\bar{p}}_0(t) = -f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

$$\dot{\bar{p}}_\alpha(t) = -f^0_{x^\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f^i_{x^\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, \bar{p}_i(t),$$

$$\dot{\bar{p}}_{\alpha\beta}(t) = -\frac{1}{2} f^0_{x^\alpha x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \frac{1}{2} f^i_{x^\alpha x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, \bar{p}_i(t) +$$

$$+ f^i_{x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, \bar{p}_{i\alpha}(t) - f^i_{x^\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, \bar{p}_{i\beta}(t) -$$

$$- \frac{1}{2} R_{\alpha\nu}(t, \bar{x}(t))\, \bar{u}^\nu_{2x^\beta}(t).$$

7.5. PROBLEMA STABILITĂŢII SOLUŢIEI

Aceasta constă în a analiza condiţiile în care

$$S^2(t, x) = \bar{p}_0(t) + \bar{p}_i(t)\,(x^i - \bar{x}^i(t)) + \bar{p}_{ij}(t)\,(x^i - \bar{x}^i(t))\,(x^j - \bar{x}^j(t))$$

este o funcţie de tip Leapunov, adică

I. $S^2(t, x)$ să fie pozitiv definită;

II. $\dfrac{dS^2(t, x(t))}{dt} \leqslant 0.$

În ceea ce priveşte I, aceasta nu se poate întîmpla decît numai dacă

$$\bar{p}_0(t) = 0,\ \bar{p}_i(t) = 0$$

pentru a avea o formă pătratică (condiţie necesară).

Relaţiile de mai sus conduc la $f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$ din prima ecuaţie diferenţială şi la $f^0_{x^\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, n$ din al doilea sistem de ecuaţii diferenţiale.

Coeficienţii formei pătratice

$$S^2(t, x) = \bar{p}_{ij}(t)\,(x^i - \bar{x}^i(t))\,(x^j - x^j(t))$$

sînt

$$-\dot{\bar{p}}_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{2} f^0_{x^\alpha x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + f^i_{x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,\bar{p}_{i\alpha}(t) +$$

$$+ f^i_{x^\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,\bar{p}_{i\beta}(t) + \frac{1}{2} R_{\alpha\nu}(t, \bar{x}(t))\,\bar{u}^\nu_{x^\beta}(t) = \frac{1}{2} f^0_{x^\alpha x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) +$$

$$+ f^i_{x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,\bar{p}_{i\alpha}(t) + f^i_{x^\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,\bar{p}_{i\beta}(t) -$$

$$- \frac{1}{2} f^0_{u^\nu u^\mu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,\bar{u}^\mu_{x^\alpha}\,\bar{u}^\nu_{x^\beta}.$$

De asemenea

$$f^0(t, x, u) = \frac{1}{2} f^0_{x^\alpha x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,(x^\alpha - \bar{x}^\alpha(t))\,(x^\beta - \bar{x}^\beta(t)) +$$

$$+ f^0_{x^\alpha u^\nu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,(x^\alpha - \bar{x}^\alpha(t))\,(u^\nu - \bar{u}^\nu(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} f^0_{u^\nu u^\mu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,(u^\nu - \bar{u}^\nu(t)\,(u^\mu - \bar{u}^\mu(t)),$$

f_0 şi derivatele parţiale de ordinul întîi ale lui f_0 în raport cu x fiind nule pe traiectoria optimală, iar

$$f^0_{u^\nu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$$

rezultînd din $H_{zu^\nu} = 0$ în condiţiile menţionate.

Se va considera f^0 strict convexă, aşa că forma pătratică ce o defineşte va fi pozitiv definită, adică matricea

$$D = \left[\begin{array}{c|c} \bar{f}^0_{x^\alpha x^\beta} & \bar{f}^0_{x^\alpha u^\nu} \\ \hline \bar{f}^0_{x^\alpha u^\nu} & \bar{f}^0_{u^\nu u^\mu} \end{array}\right]$$

va fi pozitiv definită.

Avînd în vedere că

$$S(t, x) = \int_t^{t_1} f^0(\tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau$$

şi că $[f^0_{x^\alpha x^\beta}]$ este pozitiv definită, rezultă că $1/2\, S_{x^i x^j} = p_{ij}$ definesc o matrice pozitiv definită. Astfel condiţia I este satisfăcută.

În ceea ce priveşte condiţia II, rezultă

$$S^2(t, x(t)) = \bar{p}_{\alpha\beta}(t)\,(x^\alpha(t) - \bar{x}^\alpha(t))\,(x^\beta(t) - \bar{x}^\beta(t)),$$

$$\dot{S}^2(t, x(t)) = \dot{\bar{p}}_{\alpha\beta}(t)\,(x^\alpha(t) - \bar{x}^\alpha(t))\,(x^\beta(t) - \bar{x}^\beta(t)) +$$

$$+ 2\bar{p}_{\alpha\beta}(t)\,(x^\alpha(t) - \bar{x}^\alpha(t))\,\frac{d}{dt}\,(x^\beta(t) - \bar{x}^\beta(t)),$$

dar, pe de altă parte, în jurul lui $\bar{x}(t)$ avem

$$\frac{d}{dt}\,(x^\beta(t) - \bar{x}^\beta(t)) = (f^\beta_{x^\gamma}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + f^\beta_{u^\lambda}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,\bar{u}^\lambda_{2x^\gamma})\,(x^\gamma - \bar{x}^\gamma(t)),$$

deci

$$\dot{S}^2(t, x(t)) = (\dot{\bar{p}}_{\alpha\beta}(t) + 2\bar{p}_{\alpha\gamma}(t)\,(f^\gamma_{x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + f^\gamma_{u^\lambda}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\,\bar{u}^\lambda_{2x^\beta}))\times$$

$$\times\,(x^\alpha(t) - \bar{x}^\alpha(t)),\,(x^\beta(t) - \bar{x}^\beta(t)).$$

Din

$$\bar{u}^\nu - \bar{u}^\nu_2(t) = \bar{u}^\nu_{2x^\alpha}(x^\alpha - x^\alpha(t)),$$

rezultă

$$f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}_2(t)) = \left(\frac{1}{2} f^0_{x^\alpha x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\right) + f^0_{x^\alpha u^\nu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, \bar{u}_{2x^\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2} f^0_{u^\nu u^\mu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, \bar{u}^\nu_{2x^\beta} u^\mu_{2x^\alpha})\, (x^\alpha(t) - \bar{x}^\alpha(t))\, (x^\beta(t) - \bar{x}^\beta(t)),$$

$$\bar{A}_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{2} f^0_{x^\alpha x^\beta}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + f^0_{x^\alpha u^\nu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, \bar{u}^\nu_{2x^\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2} f^0_{u^\nu u^\mu}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\, \bar{u}^\nu_{2x^\beta}\, \bar{u}^\mu_{2x^\alpha},$$

definind o matrice pozitiv definită.

Ţinînd cont de $\dot{\bar{p}}_{\alpha\beta}$, rezultă

$$\bar{A}_{\alpha\beta}(t) = -\dot{\bar{p}}_{\alpha\beta} - f^i_{x^\beta} \dot{\bar{p}}_{i\alpha} - f^i_{x^\alpha} \dot{\bar{p}}^i_\beta + f^0_{u^\nu u^\mu}\, \bar{u}^\nu_{2x^\beta}\, \bar{u}^\mu_{2x^\alpha} +$$

$$+ f^0_{x^\alpha u^\nu}\, \bar{u}^\nu_{2x^\beta} = -\dot{\bar{p}}_{\alpha\beta} - f^i_{x^\beta} \dot{\bar{p}}_{i\alpha} - f^i_{x^\alpha} \bar{p}_{i\beta} + (f^0_{u^\nu u^\mu}\, \bar{u}^\mu_{2x^\alpha} + f^0_{x^\alpha u^\nu})\, \bar{u}^\nu_{2x^\beta}.$$

Ecuaţia care defineşte pe $\bar{u}^\nu_{2x^\beta}$ este

$$f^0_{u^\nu u^\mu}\, u^\mu_{2x^\alpha} + f^0_{x^\alpha u^\nu} = -2 f^i_{u^\nu}\, p_{i\alpha},$$

astfel că

$$\bar{A}_{\alpha\beta}(t) = -\dot{\bar{p}}_{\alpha\beta}(t) - f^i_{x^\beta} \bar{p}_{i\alpha} - f^i_{x^\alpha}\, \bar{p}_{i\beta} - 2 f^i_{u^\nu} \bar{u}^\nu_{2x^\beta}\, p_{i\alpha}$$

şi, prin sumare, în raport cu α, β rezultă

$$\bar{A}_{\alpha\beta}(t) = -\dot{\bar{p}}_{\alpha\beta} - 2 (f^i_{x^\beta} + f^i_{u^\nu}\, \bar{u}^\nu_{2x^\beta})\, p_{i\alpha}$$

sau, în final,

$$\dot{\rho}^2(t, x(t)) = -\bar{A}_{\alpha\beta}(t)\, (x^\alpha(t) - \bar{x}^\alpha(t))\, (x^\beta - \bar{x}^\beta(t)).$$

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie,

$$\frac{dS^2}{dt} \leqslant 0,$$

adică este negativ definită.

În consecinţă, stabilitatea este asigurată dacă:

1) $f^0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$;

2) $f^0_{x^\alpha}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n$;

3) $[D]$ este o matrice pozitiv difinită.

1) şi 2) asigură ca S^2 să fie o formă pătratică, iar 3) permite verificarea condiţiilor de stabilitate (în virtutea metodei a II-a a lui Leapunov) referitoare la:

— $\bar{x}(t)$ — traiectoria optimală ca soluţie de echilibru;

— $x(t)$ — traiectoria cvasioptimală.

7.6. EXEMPLU: CONSUMUL MINIM DE ENERGIE

Fie conducerea

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \; x^j + u^i, \; 1 \leqslant i \leqslant n,$$

cu indicele de performanţă momentan exprimat prin

$$f^0(t, x, u) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \; x^j \right)^2 + u^{i2} \right],$$

descriindu-se astfel un proces de conducere în care optimalitatea reprezintă un minim energetic.

Aproximaţia polinomială de ordinul doi este

$$S^2(t, x) = s_0(t) + \sum_{i=1}^{n} s_i(t) \; x^i + \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}(t) \; x^i \; x^j.$$

Rezultă

$$S^2_{x^i}(t, x) = s_i(t) + 2 \sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t) \; x^j,$$

iar

$$H_2(S_x^2,\ t,\ x,\ u) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ x^j\right)^2 + u^{i2}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^i\ x^j + u^i\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(S_i(t) + 2\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t)\ x^j\right)\right].$$

Considerînd absența restricțiilor, rezultă $H_{2u} = 0$, adică

$$2\,u^i + s_i(t) + 2\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t)\ x^j = 0$$

sau

$$u^i = -\frac{1}{2}\,s_i(t) - \sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t)\ x^j,$$

deci

$$H_2^0(S_x^2,\ t,\ x) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ x^j\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,s_i(t) + \sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t)\ x^j\right)^2\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^i\ x^j - \frac{1}{2}\,s_i(t) - \sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t)\ x^j\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(s_i(t) + 2\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t)\ x^j\right)\right].$$

Calculînd, rezultă

$$H_2^0(S_x^2,\ t,\ x) = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\,s_i^2(t)\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_j^i\ s_i(t) - s_i(t)\ s_{ij}(t)\right)\times$$

$$\times\ x^j + \sum_{r,k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ir}\ b_{ik} + 2\ a_k^i\ s_{ir}(t) - s_{ir}(t)\ s_{ik}(t)\right)x^r\ x^k =$$

$$= H^{+0}_{2}(t,\ x)\ .$$

datorită însăși expresiei lui H_2^0.

De asemenea

$$S_t^2(t, x) = \dot{s}_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \dot{s}_i(t)\ x^i + \sum_{i,j=1}^{n} \dot{s}_{ij}(t)\ x^i\ x^j .$$

Ecuaţia Hamilton-Jacobi q — trunchiată este

$$S_t^2(t, x) + H_2^{+0}(S_x^2, t, x) = 0 .$$

Prin identificarea coeficienţilor polinomului de mai sus rezultă

$$\frac{ds_0}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\, s_i^2(t)\right),$$

$$\frac{ds_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n}(a_i^j\ s_j - s_j\ s_{ij}),$$

$$\frac{ds_{ij}}{dt} = -\sum_{k=1}^{n}(b_{ki}\ b_{kj} + 2\ a_i^k\ s_{ki} - s_{ik}\ s_{jk}),$$

cu condiţii finale la $t = t_1$ nule.

CAPITOLUL 8

REZULTATE PRIVIND EXISTENȚA COMENZILOR OPTIMALE

8.1. PRELIMINARII

Problema determinării comenzilor optimale în condițiile prezenței anumitor restricții ocupă un loc central în teoria sistemelor optimale. Această problemă este abordată, în primul rînd, sub următoarele aspecte : formularea, pe de o parte, a unor *condiții necesare* și, pe de altă parte, a unor *condiții suficiente* (eventual necesare și suficiente) pentru ca o comandă admisă, verificînd restricțiile impuse, să fie optimală, precum și determinarea într-un cadru cît mai general a unor *condiții de existență* a comenzilor optimale.

Sub aspectul condițiilor necesare, rezultatele obținute se grupează în jurul principiului maximului a lui L. S. Pontreaghin, reprezentînd o rezolvare adecvată a aspectului menționat. În unele cazuri, condițiile necesare se dovedesc a fi *suficiente*, fapt care, alături de alte rezultate privind *condițiile suficiente*, conduce la clarificarea acestui aspect.

Într-un anume sens în mod independent față de problema condițiilor necesare sau (și) suficiente, se pune problema *existenței* comenzilor optimale. Se constată că aceasta se află într-o strînsă legătură cu problema mai generală a *controlabilității*, exprimînd existența unor comenzi admise.

Problema condițiilor de existență a comenzilor optimale are, evident, o deosebită importanță, dat fiind că, în cazul în care un sistem de conducere nu posedă astfel de comenzi, optimizarea lui își pierde sensul, acest fapt putînd fi uneori semnul unei formalizări matematice neadecvate a procesului modelat. De menționat că în unele cazuri, chiar neliniare, existența comenzilor optimale are evidente temeiuri intuitive, legate de natura procesului modelat, situație în care teoremele de existență vin ca o confirmare teoretică a acestui fapt.

Scanned with OKEN Scanner

Evident, la studiul optimizării unui sistem de conducere, problema existenței comenzilor optimale precedă problema condițiilor necesare sau (și) suficiente pentru optimalitatea unei comenzi admise, după cum problema existenței comenzilor admise precedă problema existenței comenzilor optimale.

În cele ce urmează se vor prezenta principalele rezultate cunoscute privind existența comenzilor optimale atît în cazul sistemelor liniare, cît și în special al celor neliniare, precum și unele rezultate privind controlabilitatea.

Ținînd seama de scopul în primul rînd informativ care este urmărit și de faptul că demonstrațiile teoremelor de existență necesită unele considerații speciale de analiză funcțională, aceste demonstrații vor fi prezentate numai în unele cazuri, și în primul rînd sub aspectul ideilor principale, urmărindu-se în schimb explicitarea mai amplă a enunțurilor lor și a condițiilor în care acestea au loc.

8.2. SISTEME LINIARE

În cele ce urmează se va aborda exclusiv cazul optimizării cu timp minim.

Fie un sistem liniar descris de

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t) + u(t), \tag{8.1}$$

în care timpul $t \in R^1$ poate parcurge orice interval, vectorul stării sistemului $x(t) \in R^n$ este un vector n-dimensional, iar vectorul comandă $u(t) \in R^r$ este r-dimensional; se presupune verificată condiția inițială

$$x(0) = c \text{ cu } c \in R^n,$$

iar vectorul de comandă admis verifică restricțiile

$$|u^j(t)| \leqslant 1 \text{ cu } j = 1, 2, \ldots, r \text{ unde } u = (u^1, \ldots, u^r). \tag{8.2}$$

Are loc teorema următoare, numită *principiul bang-bang*:

TEOREMA 1. *Să presupunem că matricea pătrată $n \times n$, reală, constantă A, are valorile proprii cu partea reală negativă. Atunci există un timp minim $t^* \geqslant 0$ și o comandă optimă u^* pentru care $|u^{*j}| = 1$, cu $j = 1,2, \ldots, r$, conducînd sistemul din c în $0 \in R^n$ în timpul t^*, adică, dacă x^* este traiectoria corespunzînd comenzii u^*, atunci*

$$x^*(0) = c, \; x^*(t^*) = 0.$$

Dacă, în plus, valorile proprii pentru A sînt reale și distincte, atunci orice componentă u^{*j}, cu $j = 1, 2, \ldots, r$, a comenzii optimale u^* își schimbă semnul de cel mult $n-1$ ori.

Utilizînd *o metodă directă*, bazată pe slab compacitatea sferei-unitate în spațiul Hilbert L^2, se poate demonstra o teoremă mai generală de existență a comenzii optimale.

Fie un sistem descris de

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \tag{8.3}$$

cu condiția inițială $x(t_0) = x_0$ iar vectorul comandă admis $u(t)$ verificînd condiția $u(t) \in U$, unde $U \subseteq R^r$ este un poliedru convex închis și mărginit. Are loc

TEOREMA 2. *Fie $x_1 \in R^n$ un vector fixat. Dacă există o comandă admisă care conduce sistemul din x_0 la momentul t_0 în x_1 la un moment $t_1 \geqslant t_0$, atunci există o comandă optimă conducînd sistemul din x_0 în x_1 în timp minim.*

Observație. Din enunțul teoremei rezultă că existența comenzii optimale este redusă la existența unei comenzi admise, deci la controlabilitate.

În cazul în care există un număr finit de comenzi admise, rezultă, evident, existența comenzii optimale. Astfel, în cele ce urmează se va presupune că există o infinitate de comenzi admise.

Demonstrație. Comanda optimală se obține ca limită slab convergentă a unui *șir minimizant* de comenzi admise. Pentru aceasta să notăm cu $\mathcal{U}(x_0, x_1)$ mulțimea tuturor comenzilor admise $u(t) \in U$, cu $t \in [t_0, t_1]$, conducînd sistemul din x_0 la momentul t_0 în x_1 la momentul t_1, moment asupra căruia nu se face nici o ipoteză afară de faptul că $t_1 \geqslant t_0$. Dacă pentru $u \in \mathcal{U}(x_0, x_1)$ se notea-

Scanned with OKEN Scanner

ză $J(u) = t_1 - t_0$, atunci, evident, $0 \leqslant J(u)$ și din existența unei comenzi admise, adică $\mathcal{U}(x_0, x_1) \neq \emptyset$, rezultă

$$0 \leqslant J = \inf_{u \in \mathcal{U}(x_0, x_1)} J(u) < +\infty. \tag{8.4}$$

Se poate alege un șir $(u_k)_{1 \leqslant k < \infty}$ de comenzi admise din $\mathcal{U}(x_0, x_1)$, încît

$$\lim_{k \to \infty} J(u_k) = J, \tag{8.5}$$

un astfel de șir numindu-se *șir minimizant*. În general, șirul de funcții $(u_k)_{1 \leqslant k < \infty}$ nu este un șir convergent, de exemplu punct cu punct sau într-un alt sens, către o funcție limită, dar admite un subșir $(u_{k_l})_{1 \leqslant l < \infty}$ convergent slab către o comandă optimală $u^* \in \mathcal{U}(x_0, x_1)$.

Într-adevăr, fie $[t_0, t_{1k}]$, cu $k = 1,2,\ldots$, intervalele de timp pe care comenzile respective u_k realizează conducerea sistemului din x_0 în x_1; atunci

$$J(u_k) = t_{1k} - t_0 \text{ cu } k = 1, 2, \ldots,$$

deci există $t_1^* \geqslant t_0$ astfel ca

$$t_1^* - t_0 = J = \lim_{k \to \infty} J(u_k), \tag{8.5'}$$

adică $\lim_{k \to \infty} t_{1_k} = t_1^*$, (8.5'')

dat fiind că s-a presupus relația (8.5).

Fie $(x_k)_{1 \leqslant k < \infty}$ șirul de traiectorii corespunzînd, respectiv, comenzilor din șirul minimizant considerat; atunci

$$x_k(t) = \Phi(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\, B u_k(s)\, ds \text{ cu } t \in [t_0, t_{1k}],\ k = 1, 2, \ldots \tag{8.6}$$

unde $\Phi(t, s)$ este soluția fundamentală (matrice $n \times n$) a sistemului

$$\frac{dX(t, s)}{dt} = X(t, s),$$

cu condiția inițială $X(s, s) = I$.

Din relaţiile (8.4) şi (8.5′) rezultă

$$t_1^* \leqslant t_{1k} \text{ cu } k = 1, 2, \ldots,$$

deci are sens să se considere restricţia fiecărei comenzi u_k pe intervalul $[t_0, t_1^*]$.

Dat fiind că $u_k(t) \in U$ cu $t \in [t_0, t_1^*]$ şi U este mărginită, rezultă că există o sferă închisă $S \subseteq L^2([t_0, t_1^*], R^r)$, încît $u_k | [t_0, t_1^*] \in S$, cu $k = 1, 2, \ldots$ Din slab compacitatea sferelor într-un spaţiu Hilbert rezultă existenţa unui subşir $(u_{k_l})_{1 \leqslant l < \infty}$ şi a unei funcţii $u^* \in S$ definită pe $[t_0, t_1^*]$, încît u_{k_l} converge slab pe acest interval spre u^*, adică

$$\lim_{l \to \infty} \int_{t_0}^{t_1^*} < \varphi(t), u^*(t) - u_{k_l}(t) > \mathrm{d}t = 0 \text{ cu } \varphi \in \mathfrak{L}^2([t_0, t_1^*], R^r). \quad (8.7)$$

Pentru ca u^* definită pe $[t_0, t_1^*]$ să fie o comandă optimală, trebuie verificate următoarele condiţii:

1) $u^*(t) \in U$ cu $t \in [t_0, t_1^*]$;

2) u^* conduce sistemul din x_0 în momentul t_0 în x_1 în momentul t_1^*. Să considerăm că U este definit de sistemul de inegalităţi

$$\begin{aligned} &< a_1, u > \leqslant b_1, \\ &\ldots\ldots \\ &< a_p, u > \leqslant b_p, \end{aligned}$$

unde $a_1, \ldots, a_p \in R^r$ sînt vectori fixaţi, iar $b_1, \ldots, b_p \in R^1$ sînt scalari.

Fie $1 \leqslant q \leqslant p$; notăm

$$A_q = \{t \in [t_0, t_1^*] | < a_q, u^*(t) > > b_q\}$$

şi considerăm funcţia $\varphi_q : [t_0, t_1^*] \to R^r$, definită astfel:

$$\varphi_q(t) = \begin{cases} a_q \Leftarrow t \in A_q, \\ 0 \Leftarrow t \notin A_q. \end{cases}$$

Atunci, evident, $\varphi_q \in \mathfrak{L}^2([t_0, t_1^*], R^r)$, deci din (8.7) rezultă

$$0 = \lim_{l\to\infty} \int_{t_0}^{t_1^*} < \varphi_q(t)\, u^*(t) - u_{k_l}(t) > \mathrm{d}t =$$

$$\lim_{l\to\infty} \int_{A_q} (< a_q, u^*(t) > - < a_q, u_{k_l}(t) >)\, \mathrm{d}t. \tag{8.8}$$

Dar

$$t \in A_q \Rightarrow < a_q,\ u^*(t) > > b_q$$

și $< a_q, u_{k_l}(t) > \leqslant b_q$ cu $t \in [t_0, t_1^*]$, dat fiind că $u_{k_l} \in \mathfrak{U}(x_0, x_1)$, deci

$$t \in A_q \Rightarrow < a_q, u^*(t) > - < a_q, u_{k_l}(t) > \geqslant < a_q, u^*(t) > - b_q > 0;$$

or, ținînd seama de relația (8.8), se obține că A_q are măsura nulă pentru orice $1 \leqslant q \leqslant p$.

Deci modificînd convenabil valorile funcției u^* pe mulțimea de măsură nulă $A_1 \cup \ldots \cup A_p \subseteq [t_0, t_1^*]$, această funcție va îndeplini condiția 1) de mai sus.

Relativ la condiția 2), se observă că, conform cu relația (8.6),

$$x_1 = x_{k_l}(t_{1k_l}) = \Phi(t_{1k_l}, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_{1k_l}} \Phi(t_{1k_l}, s)\, B u_{k_l}(s)\, \mathrm{d}s,$$

cu $1 \leqslant l < \infty$; deci, trecînd la limită și ținînd seama de (8.7), (8.5'') și de continuitatea matricei Φ, rezultă

$$x_1 = \lim_{l\to\infty} x_{k_l}(t_{1k_l}) = \Phi(t_1^*, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_1^*} \Phi(t_1^*, s)\, B u^*(s)\, \mathrm{d}s,$$

deci u^* conduce sistemul din x_0 în momentul t_0 în x_1 în momentul t_1^*.

Se pot demonstra teoreme de existență și în condiții mai generale în cazul unei sistem

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) + v(t), \tag{8.1'}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care A și B sînt matrice variabile de ordin $n \times n$, respectiv $n \times r$, formate din funcții măsurabile pe R^1 integrabile pe orice interval finit, iar v un vector n-dimensional format din funcții de același tip, de asemenea și vectorul comandă r-dimensional u.

În aceste condiții, vectorul n-dimensional x, descriind evoluția stărilor sistemului, este absolut continuu pe R^1 și se determină unic în momentul în care este supus la condiția inițială

$$x(t_0) = x_0,$$

$t_0 \in R^1$ fiind un moment de timp dat, iar $x_0 \in R^n$ un vector fixat.

Expresia lui $x(t)$ este dată de relația

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)\, (B(s)\, u(s) + v(s))\, \mathrm{d}s, \qquad (8.9)$$

unde matricea $\Phi(t, s)$, de ordin $n \times n$, este soluția fundamentală a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t, s)}{\mathrm{d}t} = A(t)\, \Phi(t, s),$$

cu condiția inițială $\Phi(s, s) = I$.

Vectorul-comandă admisă u se consideră supus la restricția

$$u(t) \in U \quad \text{cu} \quad t \in R^1,$$

unde $U \subseteq R^r$ este un compact.

Fiind dat un moment de timp $t_1 \geqslant t_0$, să notăm cu $K(t_1$ mulțimea punctelor $x_1 \in R^n$ pentru care există o comandă admisă u care conduce sistemul din punctul x_0 în momentul t_0 în punctul x_1 în momentul t_1.

Structura mulțimii $K(t_1)$, numită mulțimea *punctelor accesibile* din punctul x_0 în intervalul $[t_0, t_1]$, este descrisă de

TEOREMA 3. *Pentru orice $t_1 \geqslant t_0$, $K(t_1)$ este compactă și variază continuu cu t_1. Dacă U este convexă, atunci și $K(t_1)$ este convexă.*

Demonstrație. Fie $(x_{1i})_{1\leqslant i<\infty}$ un șir de puncte din $K(t_1)$; atunci există un șir corespunzător de comenzi admise $(u_i)_{1\leqslant i<\infty}$ încît u_i conduce sistemul din x_0 în x_{1i} pe intervalul $[t_0, t_1]$, cu $i = 1, 2, \ldots$ Dat fiind că $u_i(t) \in U$ cu $t \in [t_0, t_1]$, $i = 1,2,\ldots$, și deoarece U este compactă, rezultă (vezi demonstrația pentru teorema 2) că $(u_i)_{1\leqslant i<\infty}$ este un șir slab compact în $\mathfrak{L}^2([t_0, t_1], R^r)$, deci admite un șubșir $(u_{ij})_{1\leqslant j<\infty}$ slab convergent către o funcție $u^* \in L^2([t_0, t_1], R^r)$, care este de asemenea o comandă admisă pe intervalul $[t_0, t_1]$. Din relația (8.9) rezultă atunci

$$K(t_1) \ni x^*(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\,(B(s)\, u^*(s) + v(s))\, ds =$$

$$= \lim_{j\to\infty} (\Phi(t_1, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, s)\,(B(s)\, u_{ij}(s) + v(s)\, ds =$$

$$= \lim_{j\to\infty} x_{ij}(t_1) = \lim_{j\to\infty} x_{1i_j},$$

unde x^* este traiectoria corespunzînd comenzii admise u^*, iar x_{ij} sînt traiectoriile corespunzînd comenzilor admise u_{ij}. Deci am demonstrat că orice șir $(x_{1i})_{1\leqslant i<\infty}$ din $K(t_1)$ admite un subșir $(x_{1ij})_{1\leqslant j<\infty}$ convergent către un element din $K(t_1)$, de unde rezultă compacitatea acestei mulțimi.

Arătăm acum că pentru $t_1 \geqslant t_0$, $\varepsilon > 0$ dați, există $\delta > 0$, încît oricare ar fi comanda admisă u cu traiectoria corespunzătoare x, dacă $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$, atunci $\|x(t_2) - x(t_1)\| \leqslant \varepsilon$. Într-adevăr, din relația (8.9) rezultă evaluarea

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leqslant \|(\Phi(t_2, t_0) - \Phi(t_1, t_0))\, x_0\| +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_2} \|(\Phi(t_2, s) - \Phi(t_1, s))\,(B(s)u(s) + v(s))\|\, ds;$$

or, B, u, v sînt integrabile pe orice interval compact $[t_1, t_2] \subseteq R^1$ iar $\Phi(t, s)$ depinde continuu de t.

Să presupunem că U este convexă să arătăm că atunci $K(t_1)$ posedă aceeași proprietate. Fie $x_1', x_1'' \in K(t_1)$ și $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; atunci $\lambda x_1' + (1 - \lambda)\, x_1'' \in K(t_1)$. Într-adevăr, există două comenzi admise

u', u'' care conduc sistemul pe intervalul $[t_0, t_1]$ din x_0 în $x_1' = x'(t_1)$, respectiv în $x_1'' = x''(t_1)$, x' și x'' fiind traiectoriile corespunzînd lui u' și u''. Definim funcția $u : [t_0, t_1] \to R^r$ astfel ca $u(t) = \lambda u'(t) + (1 - \lambda) u''(t)$; deoarece $u'(t), u''(t) \in U$ și U este convexă, rezultă că $u(t) \in U$, deci u este o comandă admisă. Ținînd seama de liniaritatea sistemului, traiectoria corespunzînd comenzii u va fi $x(t) = \lambda x'(t) + (1 - \lambda) x''(t)$,
deci

$$\lambda x_1' + (1 - \lambda) x_1'' = \lambda x'(t_1) + (1 - \lambda) x''(t_1) = x(t_1) \in K(t_1).$$

În cele ce urmează vom considera, legat de sistemul (8.1'), o problemă de conducere mai generală, în care se urmărește conducerea spre o *țintă mobilă*. Fie pentru orice $t \in R^1$ o mulțime compactă, nevidă $G(t) \subseteq R^n$, presupusă depinzînd continuu de t, adică verificînd condiția următoare: pentru $t \in R^1$ și $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, încît, dacă $t' \in R^1$, $|t - t'| \leqslant \delta$ și $x' \in G(t')$, atunci există $x \in G(t)$ ca $\|x' - x\| \leqslant \varepsilon$.

Evident, dacă $G(t)$ conține un singur punct, atunci ținta mobilă descrie o curbă continuă în R^n; dacă $G(t) = \{x_1\}$, x_1 fiind un punct fixat, atunci conducerea sistemului spre $G(t)$ se reduce la conducerea în x_1.

O comandă $u : [t_0, t_1] \to U$ va fi comandă admisă pe intervalul $[t_0, t_1]$ dacă traiectoria corespunzătoare x verifică condițiile

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \in G(t_1).$$

Are loc următoarea teoremă generală de existență a comenzii optimale pentru conducerea în timp minim:

TEOREMA 4. *Dacă U este convexă și există o comandă admisă $u : [t_0, t_1] \to U$, atunci există o comandă admisă optimală $u^* : [t_0, t_1^*] \to U$, cu $t_0 \leqslant t_1^* \leqslant t_1$.*

Demonstrație. Dacă $x_0 \in G(t_0)$, considerăm $t_1^* = t_0$ și teorema este demonstrată. Presupunem deci că $x_0 \notin G(t_0)$. Fie $u : [t_0, t_1] \to U$ comanda admisă pentru care $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) \in G(t_1)$, x fiind traiectoria corespunzătoare. Atunci

$$x(t_1) \in K(t_1) \cap G(t_1),$$

deci

$$K(t_1) \cap G(t_1) \neq \emptyset. \tag{8.10}$$

Definim

$$T = \{t \in [t_0, t_1] \mid K(t) \cap G(t) \neq \emptyset\};$$

atunci, datorită relației (8.10), $T \neq \emptyset$. Dar T este o mulțime închisă, dat fiind că $G(t)$ și $K(t)$ depind în mod continuu de t; deci, dacă notăm $t_1^* = \inf T$, atunci $t_1^* \in T$, deci $K(t_1^*) \cap G(t_1^*) \neq \emptyset$, deci există o comandă admisă u^* care conduce sistemul din x_0 în $G(t_1^*)$ pe intervalul $[t_0, t_1^*]$.

Din alegerea lui t_1^* rezultă că acesta este timpul minim în care se poate realiza o astfel de conducere, deci u^* este o comandă optimală.

8.3. SISTEME NELINIARE

8.3.1. CAZUL CONDUCERII OPTIME CU TIMP MINIM

Un rezultat general privind existența comenzii optimale cu timp minim de conducere pentru un sistem neliniar se datorește lui Filippov.

Se consideră un sistem neliniar de forma

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, x(t), u(t)), \tag{8.11}$$

unde $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$, cu $t \in R^1$, iar $f : R^1 \times R^n \times R^r \to R^n$ este continuă și continuu diferențiabilă în raport cu x. Fiind date două puncte fixate $x_0, x_1 \in R^n$ și un moment inițial $t_0 \in R^1$, se consideră comandă admisă orice funcție măsurabilă $u : [t_0, t_1] \to R^r$, cu $t_1 \geqslant t_0$, care conduce sistemul (8.11) din x_0 în momentul t_0 în x_1 în momentul t_1 și care verifică restricția

$$u(t) \in U(t, x(t)) \quad \text{cu} \quad t \in [t_0, t_1], \tag{8.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $x : [t_0, t_1] \to R^n$ este traiectoria corespunzînd comenzii u, iar $U(t, x(t)) \subseteq R^r$ posedă următoarele proprietăţi :

1) $U(t, x) \subseteq R^r$ este compactă pentru orice $t \in R^1$, $x \in R^n$;

2) f are următoarea proprietate de mărginire : există $C > 0$ încît

$$<x, f(t, x, u)> \leqslant C(\| x \|^2 + 1)$$

pentru orice $t \in R^1$, $x \in R^n$, $u \in U(t, x)$;

3) mulţimea de puncte din R^n

$$F(t, x) = \{f(t, x, u) \mid u \in U(t, x)\} \subseteq R^n$$

este convexă pentru orice $t \in R^1$, $x \in R^n$;

4) $U(t, x)$ este superior semicontinuă în raport cu relaţia de incluziune $\subseteq$, adică pentru orice $t \in R^1$, $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît, dacă $t' \in R^1$, $x' \in R^n$ şi $|t' - t| \leqslant \delta$, $\| x' - x \| \leqslant \delta$, atunci, oricare ar fi $u' \in U(t', x')$, există $u \in U(t, x)$ ca $\| u' - u \| \leqslant \varepsilon$.

În aceste condiţii are loc

TEOREMA 5. *Dacă există o comandă admisă, atunci există o comandă optimă, adică, dacă există* $u : [t_0, t_1] \to R^r$ *măsurabilă căreia îi corespunde traiectoria* $x : [t_0, t_1] \to R^n$ *verificînd condiţiile*

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

$$u(t) \in U(t, x(t)) \quad cu \quad t \in [t_0, t_1],$$

atunci există un cel mai mic $t_1^* \in [t_0, t_1]$ *şi o funcţie măsurabilă* $u^* : [t_0, t_1^*] \to R^r$ *căreia îi corespunde traiectoria* $x^* : [t_0, t_1^*] \to R^n$, *verificînd condiţiile*

$$x^*(t_0) = x_0, \quad x^*(t_1^*) = x_1,$$

$$u^*(t) \in U(t, x^*(t)) \quad cu \quad t \in [t_0, t_1^*],$$

deci u^* *este o comandă optimală.*

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Condițiile în care are loc teorema 5 se dovedesc a fi cerințe necesare, dat fiind că încălcarea lor poate duce la inexistența comenzii optimale. De exemplu, să considerăm sistemul

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x^2(t))^2 + (u(t))^2 \\ u(t) \end{pmatrix},$$

cu

$$t_0 = 0, \quad t_1 = T \geqslant 0,$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$U(t, x) = \{u \in R^1 \mid -1 \leqslant u \leqslant 1\},$$

în care $n = 2$ și $r = 1$.

În acest caz

$$F\left(t, \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} u^2 - (x^2)^2 \\ u \end{pmatrix} \middle| -1 \leqslant u \leqslant 1\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \in R^2 \middle| -(y^2)^2 \leqslant y^1 \leqslant 1 - (y^2)^2, \quad -1 \leqslant y^1 \leqslant 1\right\},$$

deci nu este convexă, astfel condiția 3 de mai sus nu e verificată. Dat fiind că

$$f\left(t, \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, u\right) = \begin{pmatrix} -(x^2)^2 + u^2 \\ u \end{pmatrix},$$

se constată că nici condiția 2 de mai sus nu e verificată.

Au loc următoarele afirmații :

a) pentru orice comandă admisă, $T \geqslant 1$. Într-adevăr,

$$\frac{\mathrm{d}x^1(t)}{\mathrm{d}t} = -(x^2(t))^2 + (u(t))^2 \leqslant (u(t))^2 \leqslant 1,$$

deci $1 = x^1(t_1) - x^1(t_0) = x^1(T) - x^1(0) = \int_0^T \frac{\mathrm{d}x^1(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T 1\,\mathrm{d}t = T$;

b) pentru orice comandă admisă, $T > 1$. Într-adevăr, fie prin absurd $T = 1$ și comanda admisă $u : [0,1] \to [-1,1]$; atunci

$$1 = x^1(t_1) - x^1(t_0) = x^1(1) - x^1(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x^1(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (-(x^2(t))^2 + (u(t))^2)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (u(t))^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1,$$

deci

$$\int_0^1 (-(x^2(t))^2 + (u(t))^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (u(t))^2\,\mathrm{d}t = 1,$$

deci

$$\int_0^1 (x^2(t))^2\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \int_0^1 (u(t))^2\,\mathrm{d}t = 1,$$

de unde $x^2(t) = 0$, $|u(t)| = 1$ cu $t \in [0,1]$;

dar atunci $0 = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^2(t)}{\mathrm{d}t} = u(t) = \pm 1$ absurd;

c) pentru orice $\varepsilon > 0$ există o comandă admisă $u : [0, T_\varepsilon] \to [-1, +1]$, unde $T_\varepsilon = 1 + \varepsilon$. Într-adevăr, dat fiind că

$$x^2(t) = \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{cu} \quad t \geqslant 0,$$

rezultă că se poate alege $u : [0,1 + \varepsilon] \to [-1, +1]$ astfel ca $|u(t)| = 1$ cu $t \in [0,1 + \varepsilon]$ și

$$\int_0^{1+\varepsilon} (x^2(t))^2\,\mathrm{d}t = \varepsilon;$$

dar atunci

$$x^1(1+\varepsilon) = \int_0^{1+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x^1(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1+\varepsilon} (-(x^2(t))^2 + (u(t))^2)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_0^{1+\varepsilon} (x^2(t))^2\,\mathrm{d}t + \int_0^{1+\varepsilon} 1\,\mathrm{d}t = -\varepsilon + 1 + \varepsilon = 1,$$

deci u este o comandă admisă.

Comparînd a cu c, rezultă că comanda optimă, dacă există, trebuie să conducă sistemul din x_0 în x_1 în timpul optim $T = 1$; or, acest fapt contrazice afirmația b, deci în exemplul prezentat comanda optimă nu există.

8.3.2. CAZUL CONDUCERII OPTIME GENERALE

Se consideră sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, x, (t), u(t)),$$

unde $x(t) \in R^n$, $u(t) \in U \subseteq R^r$ cu $t \in R^1$, U fiind o mulțime compactă nevidă, iar $f: R^1 \times R^n \times U \to R^n$ este continuă și continuu diferențiabilă în raport cu x. Fiind date un moment $t_0 \in R^1$, un punct $x_0 \in R^n$ și o comandă dată de o funcție măsurabilă $u: [t_0, t_1] \to U$, unde $t_1 > t_0$, conform cu teorema lui Caratheodory există unic o traiectorie absolut continuă $x: [t_0, t_1'] \to R^n$, cu $t_0 < t_1' \leqslant t_1$ care verifică condiția $x(t_0) = x_0$.

Problema de conducere considerată va fi aceeași cu cea de la teorema 4, adică se va urmări o țintă mobilă $G(t) \subseteq R^n$, $t \in R^1$, presupunînd că $G(t)$ este o mulțime compactă nevidă, depinzînd continuu de t. Comenzile admise vor fi funcțiile măsurabile $u: [t_0, t_1] \to U$ pentru care traiectoria $x: [t_0, t_1] \to R^n$ verifică condițiile

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) \in G(t_1);$$

se notează cu $\mathcal{U}(x_0, G)$ mulțimea acestor comenzi admise.

Criteriul de eficiență pentru o comandă admisă $u : [t_0, t_1] \to U$ este definit de

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, (t), u(t))\ \mathrm{d}t,$$

$x : [t_0, t_1] \to R^n$ fiind traiectoria corespunzînd comenzii admise considerate, iar $f^0 : R^1 \times R^n \times U \to R^1$ funcția-„pondere" specifică criteriului de eficiență, presupusă continuă. O comandă admisă $u^* \in \mathcal{U}(x_0, G)$ este optimă dacă pentru orice altă comandă admisă $u \in \mathcal{U}(x_0, G)$ are loc inegalitatea

$$J(u^*) \leqslant J(u).$$

În cazul sistemelor neliniare în care comanda intervine liniar, inclusiv în funcția de „pondere", are loc

TEOREMA 6. *Se consideră*
1) *sistemul de forma*

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = g(t, x(t)) + h(t, x(t))\ u(t),$$

cu $g : R^1 \times R^n \to R^n$, $h : R^1 \times R^n \to R^r$ *funcții continui cu derivate parțiale în raport cu* x *continue*;

2) *mulțimea* $U \subseteq R^r$ *nevidă, compactă și convexă*;

3) *criteriul de eficiență de forma*

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (g^0(t, x(t)) + h^0(t, x(t))\ u(t))\ \mathrm{d}t.$$

În acest caz, dacă

4) $\mathcal{U}(x_0, G)$ *este nevidă, adică există comenzi admise*;

5) *traiectoriile corespunzînd comenzilor admise sînt egal mărginite, adică există* $K > 0$ *încît pentru orice comandă admisă* $u : [t_0, t_1] \to U$ *traiectoria corespunzătoare* $x : [t_0, t_1] \to R^n$ *verifică inegalitatea*

$$\| x(t) \| \leqslant K \text{ cu } t \in [t_0, t_1],$$

atunci există o comandă admisă optimală.

Observații. Condiția 5 este satisfăcută, de exemplu, într-una din următoarele cazuri :

a) g și h sînt liniare în x;

b) g, h, $\nabla_x g$, $\nabla_x h$ sînt mărginite.

Condițiile 1, 2 și 5 se dovedesc a fi cerințe necesare dat fiind că există exemple de sisteme care, neverificînd una dintre aceste condiții, n-au comenzi admise optimale. Există de asemenea exemple de sisteme verificînd toate condițiile teoremei precedente și care posedă mai multe comenzi optimale.

În cazul sistemelor neliniare oarecare, în care comanda nu intervine neapărat liniar sau mulțimea compactă nevidă $U \subseteq R^r$ a restricțiilor comenzilor nu este convexă, se poate demonstra o teoremă analogă cu teorema 6 dacă se restrînge clasa comenzilor de la funcțiile măsurabile la cele cu variație egal mărginită. Aceasta se efectuează în modul următor : fie $M > 0$ o constantă ; se notează cu $\mathcal{U}(x_0, G, M)$ mulțimea comenzilor admise $u \in \mathcal{U}(x_0, G)$ care au variația mărginită de M, adică

$$\sup \sum_{1 \leqslant q \leqslant p} \| u(\tau_q) - u(\tau_{q-1}) \| \leqslant M,$$

unde superiorul se consideră după toate diviziunile $t_0 = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \ldots \leqslant \tau_p = t_1$, $[t_0, t_1] \subseteq R^1$ fiind intervalul de timp pe care acționează comanda u.

Are loc

TEOREMA 7. *Dacă*

1) $\mathcal{U}(x_0, G, M)$ *este nevidă, adică există comenzi admise cu variația mărginită de* M ;

2) *traiectoriile corespunzînd comenzilor admise sînt egal mărginite, adică există* $K > 0$ *încît pentru orice comandă admisă* $u \in \mathcal{U}(x_0, G, M)$ *traiectoria corespunzătoare* $x : [t_0, t_1] \to R^n$ *verifică inegalitatea*

$$\| x(t) \| \leqslant K \text{ cu } t \in [t_0, t_1],$$

atunci există o comandă admisă optimală.

Observații. Egal mărginirea traiectoriilor, cerută de condiția 2, este asigurată dacă f și $\nabla_x f$ sînt mărginite.

Scanned with OKEN Scanner

Faptul că comenzile admise au variația egal mărginită și iau valori în mulțimea compactă U permite conform teoremei Helly să se extragă un subșir convergent *punct cu punct* din orice șir minimizant de comenzi admise, fără a mai fi necesar ca mulțimea U să fie convexă sau ca comenzile să intervină liniar în sistem.

În cazul U neconvex (dar compact), condiția 1 din teorema 7 este o cerință necesară, deoarece neîndeplinirea ei poate atrage inexistența comenzii optimale.

De exemplu, fie sistemul

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1(t) \\ u^2(t) \\ -1 \end{pmatrix},$$

cu $t_0 = 0$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $G(t) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, pentru $t \geqslant t_0$, iar

$$U = \left\{\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 = 1\right\}$$

și $J(u) = \int_0^{t_1} ((x^1(t))^2 + (x^2(t))^2)\,\mathrm{d}t$.

Fie pentru $k = 1,2,\ldots$ comanda

$$u_k(t) = \begin{pmatrix} u^1(t) \\ u^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\ k\ \pi\ t \\ \sin 2\ k\ \pi\ t \end{pmatrix};$$

evident, această comandă verifică condiția $u(t) \in U$ pentru orice $t \in R^1$. Integrînd sistemul, se obține

$$x_k(t) = \begin{pmatrix} x_k^1(t) \\ x_k^2(t) \\ x_k^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sin 2\ k\ \pi\ t)/2\ k\ \pi \\ (\cos 2\ k\ \pi\ t - 1)/2\ k\ \pi \\ 1 - t \end{pmatrix},$$

deci comanda u_k este o comandă din $\mathcal{U}(x_0, G)$ pe intervalul $[t_0, t_1] = [0,1]$, dat fiind că $x_k(0) = x_0$, $x_k(1) \in G(1)$;
se obține prin calcul direct

$$J(u_k) = \frac{1}{2k^2\pi^2},$$

deci $\inf J(u_k) = 0$.

$$1 \leqslant k < \infty$$

Evident, pentru orice comandă $u \in \mathcal{U}(x_0, G)$, $J(u) \geqslant 0$, dar se constată imediat că nu există nici o comandă $u \in \mathcal{U}(x_0, G)$ pentru care $J(u) = 0$.

Într-adevăr, fie $u : [t_0, t_1] \to U$, $u \in \mathcal{U}(x_0, G)$, încît $J(u) = 0$; atunci $x^1(t) = x^2(t) = 0$, cu $t \in [t_0, t_1]$, deci $u^1(t) = \frac{dx^1(t)}{dt} = 0$, $u^2(t) = \frac{dx^2(t)}{dt} = 0$, cu $t \in [t_0, t_1]$; dar atunci $(u^1(t))^2 + (u^2(t))^2 = 0 \neq 1$, deci $u(t) \notin U$ pentru nici un $t \in [t_0, t_1]$. Rezultă deci că în cazul acestui sistem nu există comenzi optimale. Se observă că șirul de comenzi $(u_k)_{1 \leqslant k < \infty}$ nu este cu variație egal mărginită.

Sistemele în care coordonatele $x \in R^n$ ale traiectoriei intervin liniar, inclusiv în funcția-„pondere", permit obținerea unor teoreme privind existența comenzilor optimale fără a cere convexitatea mulțimii restricțiilor comenzilor $U \subseteq R^r$, fiind suficientă doar compacitatea acestei mulțimi.
Astfel fie sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\, x(t) + B(t, u(t)),$$

unde $A(t)$ este o matrice $n \times n$ continuă pentru $t \in R^1$, iar $B(t, u)$ este un vector n-dimensional continuu pentru $t \in R^1$ și $u \in U \subseteq R^r$, U fiind mulțimea compactă a restricțiilor comenzilor.

Problema de conducere se pune în același mod ca la începutul punctului 3.2, adică se urmărește atingerea unei ținte mobile, plecîndu-se dintr-un punct fixat.

Scanned with OKEN Scanner

Criteriul de eficiență pentru o comandă admisă $u : [t_0, t_1] \to U$ din $\mathcal{U}(x_0, G)$ este definit de

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (a(t)\, x(t) + b(t, u(t)))\, dt,$$

unde $a(t) \in R^n$, $b(t, u) \in R^1$ depinzînd continuu de $t \in R^1$, respectiv de $t \in R^1$ și $u \in U$.

TEOREMA 8. *Dacă $G(t)$ este superior semicontinuă în $t \in R^1$ (relativ la relația de incluziune $\subseteq$) și există o comandă admisă, atunci există o comandă optimală.*

Demonstrație. Fie $t_1 \geqslant t_0$; punctul $(t_1, \hat{x}_1) \in R^1 \times R^{n+1}$ se numește *accesibil* dacă există o comandă admisă $u : [t_0, t_1] \to U$ din $\mathcal{U}(x_0, G)$ pentru care traiectoria corespunzătoare $x : [t_0, t_1] \to R^n$ verifică relația

$$\hat{x}_1 = (J(u), x(t_1));$$

se notează cu $K(t_1)$ mulțimea acestor puncte.

Se constată că

1) $K(t_1)$ este compactă și convexă;

2) $K(t_0, t_1) = \bigcup_{t \in [t_0, t_1]} K(t)$ este compactă.

Din semicontinuitatea superioară a lui $G(t)$ rezultă că mulțimea

$$\hat{G}(t_1) = \{(t, x) \mid t \in [t_0, t_1],\ x \in G(t)\} \subseteq R^1 \times R^n$$

este închisă pentru orice $t_1 \geqslant t_0$, deci mulțimea

$$\hat{H}(t_1) = \{(t, \xi, x) \mid (t, x) \in \hat{G}(t_1),\quad \xi \in R^1\} \subseteq R^1 \times R^1 \times R^n$$

este de asemenea închisă pentru orice $t_1 \geqslant t_0$.

Fie $u : [t_0, t_1] \to U$ o comandă admisă; atunci

$$K(t_0, t_1) \cap \hat{H}(t_1) \neq \varnothing,$$

dar această mulțime este compactă, căci $K(t_0, t_1)$ este compactă, iar $\hat{H}(t_1)$ este închisă, deci există $(t_1^*, \xi^*, x_1^*) \in K(t_0, t_1) \cap \hat{H}(t_1)$ pentru care ξ^* este minimal.

De aici rezultă existența unei comenzi admise $u^* : [t_0, t_1^*] \to U$ pentru care traiectoria corespunzătoare $x^* : [t_0, t_1] \to R^n$ verifică relația

$$(\xi^*, x_1^*) = (J(u^*), x^*(t_1^*)),$$

deci u^* este o comandă optimală.

În condițiile în care, deși există comenzi admise, nu există comenzi optimale, în unele cazuri se pot determina șiruri minimizante de comenzi (minimizînd funcția de eficiență) pentru care traiectoriile corespunzătoare converg către o curbă absolut continuă, verificînd condițiile inițială și finală, dar care nu corespunde obligatoriu vreunei comenzi; o astfel de curbă se numește *traiectorie optimală de alunecare.*

Pentru ilustrare vom considera cazul unui sistem autonom

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)),$$

avînd drept comenzi admise toate funcțiile măsurabile $u : [t_0, t_1] \to U \subseteq R^r$ cu U compact, cărora le corespund traiectorii $x : [t_0, t_1] \to R^n$, verificînd condițiile $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, unde $x_0, x_1 \in R^n$ sînt date. Se consideră problema conducerii în timp minim.

Se presupune că traiectoriile sînt egal mărginite, adică există o constantă $C > 0$ încît

$$< x(t), f(x(t), u(t)) > \leqslant C \| x(t) \|^2 \text{ cu } t \in [t_0, t_1]$$

pentru orice comandă admisă, x fiind traiectoria corespunzătoare.

În aceste condiții are loc

TEOREMA 9. Dacă există o comandă admisă, atunci există un șir minimizant de comenzi admise $u_k : [t_0, t_{1k}] \to U$, cu $k = 1, 2, \ldots$, astfel încît:

1) t_{1k} converge descrescător spre $t_1^* \geqslant t_0$, unde t_1^* este inferiorul timpilor realizați de toate comenzile admise;

2) traiectoriile corespunzătoare x_k cu $k = 1,2,\ldots$, converg uniform pe $[t_0, t_1^*]$ spre o curbă-limită $x^* : [t_0, t_1^*] \to R^n$, care este, ori o traiectorie optimală (în cazul în care există o comandă optimală), ori o traiectorie optimală de alunecare.

O altă extensiune a problemei inițiale de conducere optimală este dată de *problema variațională relaxată*, care se formulează după cum urmează. Fie

1) $T = [t_0, t_1] \subseteq R^1$ un interval compact de timp ;

2) U o mulțime oarecare reprezentînd spațiul valorilor comenzilor ;

3) $A \subseteq V \subseteq R^n$, V fiind un domeniu, iar A o mulțime închisă reprezentînd spațiul fazelor ;

4) $B \subseteq A \times A$ o mulțime închisă, reprezentînd mulțimea condițiilor la capete (bilocale) ;

5) $g : T \times V \times U \to R^n$ funcția care definește dinamica sistemului de conducere prin ecuația diferențială

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t), u(t)), \text{ a.p.t. după } t \in [t_0, t_1], \tag{8.13}$$

unde traiectoria $x : [t_0, t_1] \to A$ se presupune a fi absolut continuă pentru comanda considerată $u : [t_0, t_1] \to U$ și verifică condițiile la capete

$$(x(t_0), x(t_1)) \in B.$$

Problema *inițială* de conducere optimală constă în determinarea unei perechi traiectorie-comandă (x, u) pentru care $x^1(t_1)$ este minim, x^1 fiind prima componentă a vectorului x.

În continuare, pentru orice $(t, x) \in T \times A$ se consideră mulțimea $G(t, x) = \{g(t, x, u) \mid u \in U\} \subseteq R^n$; evident, o funcție absolut continuă $x : [t_0, t_1] \to A$ verifică sistemul (8.13) pentru o anumită comandă numai dacă

$$\frac{dx(t)}{dt} \in G(t, x(t)), \text{ a.p.t. după } t \in [t_0, t_1]. \tag{8.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci problema *inițială* admite următoarea formulare echivalentă : să se determine o traiectorie $x : [t_0, t_1] \to A$ funcție absolut continuă astfel încît

1) $$\frac{dx(t)}{dt} \in G(t, x(t)), \text{ a.p.t. după } t \in [t_0, t_1];$$

2) $$(x(t_0), x(t_1)) \in B;$$

3) $$x^1(t_1) \text{ min.}$$

Se notează cu $F(t,x)$ acoperirea convexă închisă a mulțimii $G(t,x)$.

Problema *relaxată* de conducere optimală constă în determinarea unei traiectorii $x : [t_0, t_1] \to A$ funcție absolut continuă, astfel încît

1) $$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t)), \text{ a.p.t. după } t \in [t_0\ t_1];$$

2) $$(x(t_0), x(t_1)) \in B;$$

3) $$x^1(t_1) \text{ min.}$$

TEOREMA 10. *Să presupunem îndeplinite următoarele condiții : există o constantă* $0 < M < \infty$, *un compact* $D \subseteq A$ *și o mulțime* $T' \subseteq T = [t_0, t_1]$, T' *având măsura* $t_1 - t_0$, *încît*

1) $g(t, x, u)$ *este continuă în* $(t, x) \in T' \times D$ *uniform în raport cu* $u \in U$;

2) $\|g(t, x, u)\| \leqslant M$ *cu* $(t, x, u) \in T \times D \times U$;

3) *există o traiectorie relaxată* $x^* : [t_0, t_1] \to A$ *astfel că pentru orice altă traiectorie relaxată* $x : [t_0, t_1] \to A$ *are loc implicația*

$$x^1(t_1) < x^{*1}(t_1) \Rightarrow (x(t)) \in D \text{ cu } t \in [t_0, t_1]).$$

Atunci există o traiectorie relaxată optimală.

TEOREMA 11. *Dacă există constantele* $0 < M, K < \infty$, *o familie finită sau numerabilă* $(T_i \mid i \in I)$ *de părți măsurabile din* T *astfel*

ca măsura reuniunii $\bigcup_{i \in I} T_i$ *este* $t_1 - t_0$ *şi o funcţie* $\varepsilon : R^1 \to [0, \infty)$ *cu proprietatea* $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, *verificînd condiţiile*

1) $\| g(t'', x, u) - g(t', x, u) \| \leqslant \varepsilon | t'' - t' |$ *pentru orice*

$$(t', x, u), (t'', x, u) \in T_i \times V \times U \quad \text{cu } i \in I \text{ fixat};$$

2) $\| g(t, x'', u) - g(t, x', u) \| \leqslant K \| x'' - x' \|$ *pentru orice*

$$(t, u) \in T \times U, x', x'' \in V;$$

3) $\| g(t, x, u) \| \leqslant M$ *pentru orice* $(t, x, u) \in T \times V \times U$, *atunci pentru orice traiectorie relaxată* $x^* : [t_0, t_1] \to A$ *există un şir de traiectorii iniţiale* $x_j : [t_0, t_1] \to A$ *cu* $j = 1, 2, \ldots$ *astfel încît:*

4) x_j *converg uniform spre* x^* *pe intervalul* $[t_0, t_1]$;

5) $x_j(t_0) = x^*(t_0)$ cu $j = 1, 2, \ldots$

8.4. CONTROLABILITATEA

Fie un sistem oarecare descris de

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)). \tag{8.15}$$

Fie $x_0 \in R^n$ un punct oarecare şi $t_0 \in R^1$ un moment de timp oarecare. Se spune că x_0 este *controlabil* la momentul t_0 numai dacă există un moment $t_1 \geqslant t_0$ şi o comandă $u : [t_0, t_1] \to R^r$ nesupusă la *restricţii*, încît traiectoria corespunzătoare $x : [t_0, t_1] \to R^n$ duce sistemul din x_0 la momentul t_0 în 0 la momentul t_1, adică, dacă $x(t_0) = x_0$, atunci $x(t_1) = 0$.

Dacă orice punct $x_0 \in R^n$ este controlabil la momentul t_0, se spune că sistemul este *complet controlabil* la momentul t_0. În cazul completei controlabilităţii la orice moment se spune că sistemul este *complet controlabil.*

Evident, prezintă o importanță deosebită controlabilitatea cu comenzi supuse la anumite restricții, în special de forma obișnuită $u : [t_0, t_1] \to U$, unde $U \subseteq R^r$.

Înainte de a prezenta rezultatele mai importante în acest caz, vom enunța o teoremă pentru cazul sistemelor liniare cu comenzi nesupuse la restricții.

Fie sistemul liniar

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \tag{8.16}$$

inițializat în punctul $x_0 \in R^n$ la momentul $t_0 \in R^1$. Sub acțiunea unei comenzi $u : [t_0, t_1] \to R^r$ rezultă traiectoria $x: [t_0, t_1] \to R^n$, dată de

$$x(t) = \Phi(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau \text{ cu } t \in [t_0, t_1],$$

unde matricea $n \times n$, $\Phi(t, \tau)$ este soluția fundamentală a sistemului

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = A(t)\,\Phi(t, \tau),$$

cu condiția inițială $\Phi(\tau, \tau) = E$.

TEOREMA 12. *Sistemul (8.16) este complet controlabil la momentul t_0, numai dacă există $t_1 > t_0$, încît matricea simetrică*

$$W(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\,B(t)\,B'(t)\,\Phi'(t_0, t)\,dt$$

este strict pozitiv definită (sau, echivalent, este nedegenerată).

Ideea demonstrației este următoarea: se consideră matricea $n \times r$

$$Y(t, t_0) = \Phi(t_0, t)\,B(t);$$

sistemul (8.16) se numește propriu *numai dacă pentru orice vector* $y \in R^n$ *are loc implicația*

$$\left.\begin{array}{l} y'Y\ (t,t_0) = 0 \\ pentru\ \ t \in [t_0, t_1] \\ cu\ \ t_1 > t_0 \end{array}\right) \Rightarrow y = 0,$$

adică numai dacă pe intervalul $[t_0, t_1]$ *liniile matricei* $Y\ (t, t_0)$ *sînt liniar independent. Or, liniile matricei* $Y(t, t_0)$ *sînt liniar dependente pe intervalul* $[t_0, t_1]$ *numai dacă*

$$\det \int_{t_0}^{t_1} Y\ (t,\ t_0)\ Y'\ (t, t_0)\, dt = 0. \tag{8.17}$$

Evident,

$$W(t_1, t_0) = \int_{t^0}^{t_1} Y\ (t, t_0)\ Y'\ (t, t_0)\, dt,$$

deci condiția (8.17) este echivalentă cu $\det W\ (t_1, t_0) = 0$. Matricea $W\ (t_1, t_0)$ este, evident, simetrică și pozitiv definită, deci este strict pozitiv definită numai dacă este nedegenerală. Ținînd seama de relațiile precedente și de faptul că un sistem propriu este complet controlabil, rezultă teorema 12.

Observație. În cazul în care se urmărește conducerea sistemului liniar din punctul x_0 la momentul t_0 în punctul x_1 la momentul t_1, acest lucru este posibil numai dacă există un vector $v \in R^n$, $v \neq 0$ încît

$$W\ (t_1, t_0)\ v = \Phi\ (t_0, t_1)\ \ x_1 - x_0.$$

Corolarul 1. În cazul unui sistem liniar cu matricele A, B constante, complet controlabilitatea este echivalentă cu condiția ca matricea $n \times n$

$$(B, AB, \ldots, A^{n-1} B)$$

să aibă rangul n.

Considerăm acum un sistem autonom

$$\frac{dx\ (t)}{dt} = f\ (x\ (t),\ u\ (t)), \tag{8.18}$$

în care $f: R^n \times U^* \to R^n$ este continuă în (x, u) și sînt continue de asemenea $\nabla x f$ și $\nabla u f$; $U^* \subseteq R^r$ este o mulțime deschisă conținînd mulțimea U. Se consideră mulțimea $\Gamma \subseteq R^n$ a tuturor punctelor $x_0 \in R^n$ pentru care există o comandă admisă $u: [t_0, t_1] \to U$, funcție măsurabilă, astfel ca traiectoria corespunzătoare duce punctul x_0 la momentul t_0 în punctul 0 la momentul t_1.

LEMĂ. Dacă 0 este punct interior în Γ, atunci Γ este o mulțime deschisă și conexă.

Problema dacă 0 este punct interior în Γ se rezolvă simplu, în cazul în care $r \geqslant n$ (r fiind dimensiunea vectorilor-comandă $u \in U \subseteq R^r$, iar n dimensiunea vectorilor-traiectorie $x \in R^n$), prin

TEOREMA 13. Dacă

1) 0 (*din* R^r) *este punct interior în* U,

2) $f(0,0) = 0$,

3) *matricea* $\nabla_u f(0, 0)$ *are rangul* n, *atunci* 0 (*din* R^n) *este punct interior în* Γ, *deci, conform cu lema precedentă,* Γ *este deschisă și conexă în* R^n.

Din teorema 1 de la pct. 2 și din teorema precedentă rezultă

Corolarul 2. În cazul unui sistem liniar cu matricele A, B constante, dacă

1) $r \geqslant n$,

2) 0 (din R^r) este punct interior în U,

3) matricea B are rangul n,

atunci Γ este deschisă și conexă, conținînd 0 din R^n.

În cazul $r < n$ are loc

TEOREMA 14. Dacă

1) U *este compactă și conține pe* 0 *ca punct interior,*

2) $f(0, 0) = 0$,

3) *există un vector* $v \in R^n$ *încît vectorii*

$$\nabla_u f(0,0)v,\ \nabla_x f(0,0)\ \nabla_u f(0,0)\ v, \ldots, (\nabla_x f(0,0))^{n-1}\ \nabla_u f(0,0)\ v$$

sînt liniar independenţi, atunci Γ *este deschisă, conexă şi conţine punctul* 0.

Corolarul 3. În condiţiile de la teorema 14, dacă sistemul autonom (8.18) este global asimptotic stabil în $0 \in R^n$, atunci $\Gamma = R^n$.

Să considerăm sistemul neliniar sub forma generală (8.15), presupunînd că $f : R^1 \times R^n \times U^* \to R^n$ este continuă, cu derivatele $\nabla_x f, \nabla_u f$ continue, $U^* \subseteq R^r$ fiind un domeniu conţinînd compactul U despre care se presupune că conţine $0 \in R^r$ ca punct interior. Se presupune de asemenea că $f(t, 0, 0) = 0$, cu $t \in R^1$. Fie $t_0 \in R^1$; se spune că sistemul (8.15) este *local complet controlabil* la momentul t_0 numai dacă există o vecinătate $V \subseteq R^n$ a originii $0 \in R^n$ şi o vecinătate W a lui U încît orice punct din V poate fi condus în $0 \in R^n$ printr-o anumită comandă $u : [t_0, t_1] \to W$.

TEOREMĂ 15. *Să presupunem că matricele,* $n \times n$, *respectiv* $n \times r$

$$A(t) = \nabla_x f(t, 0, 0), \; B(t) = \nabla_u f(t, 0, 0)$$

sînt continue în $t \in R^1$; *atunci, dacă sistemul liniar*

$$\frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t) \times (t) + B(t)\, u(t) \tag{8.19}$$

este complet controlabil în t_0, *rezultă că sistemul neliniar* (8. 15) *considerat iniţial este local complet controlabil la momentul* t_0.

Observaţie. Complet controlabilitatea sistemului liniar asociat (8.19) nu este necesară.

Exemplu. Fie $n = r = 1$ şi sistemul

$$\frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + (u(t))^3;$$

se constată că acest sistem este local complet controlabil pentru orice $t_0 \in R^1$, dar

$$B(t) = \nabla_u f(t, 0, 0) = 3u^2 \Big| \begin{matrix} = 0 \\ u = 0, \end{matrix}$$

deci sistemul liniar asociat (8.19) nu este complet controlabil.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

ATHANS, M., P. L. FLAB, *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Ist Applications*, New York, Mc Graw — Hill Book Co., Inc., 1965.

BALAKRISHNAN, A. V., *Optimal Control Problems in Banach Spaces*, Soc. Ind. Appl. Math., **A, 3,** *1* (1965).

BALAKRISHNAN, A. V., H. C. HSIEH, *Function Space Methods in Control Systems Optimization*, Proc. of the Optimum System Synthesis Conf. Dayton, Ohio, 1962, p. 10—40.

BELLMAN, R., *Dynamic Programming*, Princeton, N. J., Princeton University Press, 1957.

BELLMAN, R., *Adaptive Control Processes, a Guidead Tour*, Princeton, N. J., Princeton University Press, 1961.

BELLMAN, R., *Mathematical Optimization Techniques*, Berkeley, University of California Press, 1963.

BELLMAN, R., R. KALABA, *Dynamic Programming and Feedback Control*, Proc. IFAC Congres, Moscova, vol. 1, 1960, p. 460—464.

BERKOVITZ, L. D., *The Equivalence of Some Necessary Conditions for Optimal Control in Problems with Bounded State Variable*, J. Math. Anal. Appl., **10**, *2*, 275—283 (1965).

BOLTEANSKI, V. G., *Metodele matematice ale conducerii optimale*, Moscova, 1966.

BOLTYANSKII, V., R. GAMKRELIDZE, E. MISCHENKO, L. PONTRYAGIN, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1962.

BUTKOVSKI, A.G., *Optimum Processes in Systems with Distributed Parameters*, Automatika i telemekhanika, **22**, 17—26 (1961).

CHANG, S. S. L., *Synthesis of Optimum Control Systems*, New York, McGraw-Hill Book Co. Inc., 1961, p. 144—149.

CODDINGTON, E. A., N. L. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1955.

DUNFORD N., J. SCHWARTZ, *Linear Operators*, New York, Interscience Publishers, Inc., 1959.

FILIPPOV, A. F., *On Certain Questions in the Theory of Optimal Control*, Vestnik Moskov. Univ., Ser. Mat., Mekh., Abstr., Fiz., Khim., **2**, 25—32 (1959).

Scanned with OKEN Scanner

GELFAND, I. M., S. V. FOMIN, *Calculus of Variations*, N. J., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1963.

GIBSON, J. E., *Nonlinear Automatic Control*, New York, Mc Graw Hill Book Co. Inc., 1963.

HALANAY, A., *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, București, Edit. Academiei, 1963.

HALKIN, H., *On the Necessary Condition for Optimal Control of Nonlinear Systems*, J. Anal. Math., **12**, 1—82 (1963).

HALKIN, H., *The Principle of Optimal Evolution*, în J.P. La Salle and S. Lefschetz (eds.), *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, New York, Academic Press, Inc., 1963.

HALKIN, H., *Method of Convex Ascent*, in A.V. Balakrishnan and Lucien W. Neustadt (eds.), *Computing Methods in Optimization Problems*, New York, Academic Press, Inc., 1964, p. 211—239.

HALKIN, H., *Topological Aspects of Optimal Control of Dynamical Polysystems*, Contrib. Differential Equations, **3**, *4*, 377—385 (1964).

HALKIN H., *Aulaximum Principle of the Pontryagin Type for Systems Described by Nonlinear Difference Equations*, J. Soc. Ind. Appl. Math., **A 4**, *1*, 90—111 (1966).

HESTENES, M. R., *On Variational Theory and Optimal Control Theory*, J. Soc. Ind. Appl. Math., **A 3**, *1*, 23—48 (1965).

HESTENES, M. R., *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, New York, John Wiley, 1966.

KALMAN, R. E., *On the General Theory of Control Systems*, Proc. IFAC Congress, Butterworths & Co., Ltd., Londra, vol. 4, 1961, p. 2020—2030.

KALMAN, R. E., *Mathematical Description of Linear Dynamical Systems*, J. Soc., Ind. Appl. Math., **A 1**, *2*, 152—192 (1963).

KALMAN, R. E., Y. C. Ho, K. S. Narendra, *Controllabilty of Linear Dynamical Systems*, Contrib. Diff. Equations, **1**, *2*, 189—213 (1963).

KIPINIAK, W., *Dynamic Optimization and Control: A. Variational Approach*, New York, M.T.T. Press and John Wiley & Son., Inc., 1961.

KRASOVSKI, N. N., *On the Theory of Controllability and Observability of Linear Dynamic Systems*, Prikl. Matemat. Mekh., **28**, *1*, 3—14 (1964).

KROTOV, V. F., *Methods for Lolving Variational Problems on the Basis of the Sufficient Conditions for an Absolute Minimum. I*, Automat. Remote Control., **23**, 1473—1484 (1963).

LA SALL, J. P., *Time Optimal Control*, Bol. Soc., Mat. Mex., **5**, 120—124 (1960).

LEE, E. B., L. MARKUS, *Foundations of Optimal Control Theory*, New York—Londra—Sydney, John Wiley & Sons, Inc.

LURIE K. A., *The Mayer — Bolza Problem for Multiple Integrals and the Optimization of the Performance of Systems with Distributed Parameters*, Prikl. Matemat. Mekh., **27**, *5*, 842—853 (1963).

Scanned with OKEN Scanner

MEVRIAN, E. W., *Optimization Theory and the Design of Feedback Control Systems*, New York, McGraw — Hill Book Co., Inc., 1964.

MESAROVIC, M. D., *On the Eustence and Uniqueness of the Optimal Multivariable System Synthesis*, IRE Intern, Conv. Record, partea 4, 1960, p. 10—14.

NUESTADT, L. W., *Synthesizing Time Optimal Control Systems*, J. Math. Anal. Appl., **1**, 484—493 (1960).

NEUSTADT, L. W., *Time Optimal Control Systems with Position and Integral Limits*, J. Math. Anal. Appl., **3** (1961).

NEUSTADT, L. W., *Minimum Effort Control Systems*, J. Soc. Ind. Appl. Math., **A, 1**, *1*, 16—31 (1962).

NEUSTADT, L. W., *A Synthesis Method for Optimal Controls*, Proc., Optimum System Synthesis Conf., 1962, p. 373—382.

NEUSTADT, L. W., *Optimization, A Moment Problem and Nonlinear Programining*, J. Loc. Ind. Appl. Math., **A2**, *1*, 33—53 (1964).

PALLU DE LA BAVRIÈRE, R., *Optimal Control Theory*, Saunders Co., 1967.

PENESCU, C., V. IONESCU, E. ROSINGER, *Programarea matematică cu aplicații în energetică*, București, Edit. Academiei, 1967.

PONTRYAGHIN, L. S., V. G. BOLTYANSKI, R. V. GAMKRELIDZE E. F. MISCHENKO *The Mathematical Theory of. Optimal Processes*, New York, Interscience Publishers, Inc., 1962.

SCHMAEDEKE, W. W., *Optimal Control Theory for Nonlinear Vector Differential Equations Containiug Measures*, J. Loc. Ind. Appl. Math. Ser., **A 3**, *2*, 231—280 (1965).

SCHMAEDEKE, W. W., *Existence Theory of Optimal Controls*, în C.T. Leondes (ed.), *Advances in Control Systems: Theory and Applications*, vol. 3, New York, Academic Press, Inc., 1965.

TON, J. R., *Modern Control Theory*, New York, McGraw-Hill Book Co. Inc., 1964.

ZADEH, L. A., C. A. DESOER, *Linear Systems Theory: The State Space Approach*, New York, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1963.

Scanned with OKEN Scanner

OPTIMAL PROCESSES

by C. PENESCU, VL. IONESCU, E. ROSINGER

ABSTRACT

The book presents author's viewpoint on the problem of optimal control.

The essential ideas are exposed in Chapters 1, 2 and 3, which give the mathematical foundations of the optimal control. The main concept on which the proof of the optimality conditions is based is represented by the separation principle. Different kinds of extension of the above mentioned principle made possible to approach the maximum principle with transversality conditions and inequality constraints.

A proof of the discrete version of the maximum principle was given in weaker conditions. The final part of Chapter 3 deals with the generalized principle of optimality. The dynamic programming principle appears as a particular case of this principle. Chapters 4 and 5 are devoted to linear time optimal systems and sufficiency conditions.

Chapter 6 shows the advantage of Hilbert space applications to optimal control.

Chapter 7 exposes the truncated Hamiltonian procedure to achieve the optimal synthesis in small regions of the state space.

Some discussions and remarks about the existence of the optimal control are given in Chapter 8.

Scanned with OKEN Scanner

CONTENTS

page

Chapter 1. SYSTEM AND OPTIMALITY 13
1.1. System definition 13
1.2. State definition 18
1.3. Controllability 21
1.4. Adaptability 22
1.5. Optimality 26

Chapter 2. MATHEMATICAL FOUNDATION OF OPTIMAL CONTROL 32
2.1. Introduction 32
2.2. The separation principle 33
2.3. The maximum principle for fixed end points 56
2.4. The maximum principle with transversality conditions . . . 108
2.5. The maximum principle with inequality constraints 117
2.6. The discrete version of the maximum principle 120

Chapter 3. BELLMAN EQUATION AND HAMILTON - IACOBI FORMALISM 138
3.1. Statement of the problem 138
3.2. Necessity theorem. Bellman equation 142
3.3. Sufficiency theorem 146
3.4. Canonical system 150
3.5. The maximum principle 154
3.6. Dynamic programming principle 159

Chapter 4. LINEAR TIME OPTIMAL SYSTEMS 186
4.1. Statement of the problem 186
4.2. Sufficiency conditions 191
4.3. Uniqueness of optimal control 194
4.4. Existence of optimal control 198
4.5. Neustadt theorem and Eaton algorithm 209

Chapter 5. SUFFICIENCY CONDITIONS OF BOLTIAWSKII 228
5.1. Statement of the problem 228
5.2. Regular synthesis 233
5.3. Sufficiency conditions furnished by Bellman equation 243

Scanned with OKEN Scanner

Page

Chapter 6. GENERAL INTEGRAL COST CRITERIA 250
6.1. Functional quadratic programming 250
6.2. Wiener-Hopf equation 254
6.3. The Steeper descent method 258
6.4. A particular case 262
6.5. Spectral decomposition in $H^{\mathbf{x}}$ 264
6.6. Controllability 268
6.7. Integral cost criteria 271
Chapter 7. OPTIMAL SYNTHESIS IN SMALL REGIONS 283
7.1. The truncated Hamiltonian 283
7.2. Truncated Hamilton-Iacobi equation 286
7.3. Truncated canonical system 289
7.4. Stability of the solution 290
7.5. An example : minimum fuel cost 293
Chapter 8. RESULTS ON THE EXISTENCE OF OPTIMAL CONTROL 300
8.1. Introduction 300
8.2. Linear systems 301
8.3. Nonlinear systems. Time optimal systems 309
8.4. Controllability 322

Scanned with OKEN Scanner

Redactor: Ing. LIA CREȚOIU
Tehnoredactor: MARILENA POPESCU

Bun de tipar 23.05. 1970. Hîrtie Scris IA, format 16/61×86, de 80 G/m². Coli de tipar 21. C.Z. pentru biblioteci mari { *621 — 50.* / *007.5.* *C.Z. pentru biblioteci mici 621—52.*

Întreprinderea Poligrafică Informația, București, str. Brezoianu, nr. 23—25. Republica Socialistă România

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

60

Noţiunea de optimalitate joacă în prezent un rol esenţial, afectînd domenii de activitate umană. Subordonat conceptului de sistem, noţiunea de proces optimal impune alegerea acelui proces de conducere al sistemului pentru care se realizează o extremizare a performanţelor acestuia. Prima formalizare matematică a noţiunii de optim aparţine lui R. Bellman, enunţată în cunoscutul principiu al programării dinamice. Abordarea riguroasă şi, într-o oarecare măsură exhaustivă a noţiunii amintite aparţine lui L. S. Pontreaghin şi şcolii sale, care a enunţat aşa-numitul principiu al maximului, condiţie indispensabilă, căreia trebuie să i se supună orice proces de conducere optimală. Se menţionează că lucrarea este prima de acest gen care apare în limba română.

Lei 12

Scanned with OKEN Scanner